Suite V - Die den Weg Weisende

Teil 4: Essays 347-355

$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$. $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}$. $\mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}$.

R **ist ana2 von** ϕ, q, x**.**

$\mathtt{rf}2\phi qx$.

MSC2010: 28A12. 11B50. 28A10.

Andreas Unterreiter

30. September 2016

Maßtheorie: $o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ als $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

Ersterstellung: 23/06/15 **Letzte Änderung: 02/03/16**

347-1. Unter bestimmten Anforderungen an $o, \Box$, $\Box$ Algebra in A, ist $o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ ein $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$. Zur Vorbereitung dieser Untersuchung soll zunächst ein Klassen-Term in die Essays eingebracht werden, dessen definierende Eigenschaft vertraut erscheint.

347-1(Definition)

$$\mathsf{347.0}(x, E, M) = \{\omega : x(\omega \cup E)\_M\_x(\omega \cap E) = x(\omega)\_M\_x(E)\}$$

ALG-Notation

347-2. Hier wird **345-13** im Spezialfall $q = o$ ist $\Box$neutral auf A re-formuliert.

347-2(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

b) $\mathsf{ran}\,(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}) \subseteq A$.

c) $o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}$ *Funktion.*

d) $o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}$ *Relation.*

e) $o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$.

f) $\forall\alpha,\beta : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))$
$$\Rightarrow \qquad (o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta) = \mathtt{rf1}o\Box(\alpha)(\beta).$$

g) $(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(0) = o$.

h) $\forall\alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow ((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\}) = \alpha)$.

i) $\forall\alpha,\beta : (\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$
$$\Rightarrow \qquad ((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup \beta) = (o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta)\_\Box\_\alpha).$$

`ALG.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **347-2**</u>

`1:` Aus $\rightarrow)$ “ o ist $\Box$neutral auf A ”
folgt via **208-1(Def)**: $(o \in A) \wedge (\forall \beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta = \beta\_\Box\_o = o\_\Box\_\beta))$.

`2:` Aus $\rightarrow)$ “ $\Box$ Algebra in A ” ,
aus $\rightarrow)$ “ A Menge ” ,
aus $\rightarrow)$ “ A Menge ” ,
aus $\rightarrow)$ “ $\Box$ tunnelt rechts auf A ” und
aus `1` “ $o \in A \ldots$ ”
folgt via **345-13**:

$$\mathsf{dom}\,(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$$
$$\wedge \quad \mathsf{ran}\,(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box) \subseteq A$$
$$\wedge \quad o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box \text{ Funktion}$$
$$\wedge \quad o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box \text{ Relation}$$
$$\wedge \quad o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$$
$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})) \Rightarrow \quad (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\beta) = \mathtt{rf1}o\Box(\alpha)(\beta)$$
$$\wedge \quad (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(0) = o$$
$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in A) \Rightarrow ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\beta\}) = o\_\Box\_\beta)$$
$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : (\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Rightarrow \quad ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\alpha\} \cup \beta) = (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\beta)\_\Box\_\alpha).$$

`3.a):` Aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$

`3.b):` Aus 2
folgt: $\mathsf{ran}\,(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box) \subseteq A$.

`3.c):` Aus 2
folgt: $o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ Funktion.

`3.d):` Aus 2
folgt: $o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ Relation.

`3.e):` Aus 2
folgt: $o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$.

...

<u>Beweis **347-2**</u> ...

3.f): Aus 2
folgt: $$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})) \Rightarrow ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\beta) = \mathtt{rf1}o\Box(\alpha)(\beta)).$$

3.g): Aus 2
folgt: $(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(0) = o$.

$\boxed{\mathtt{Thema3.1}}$ $\alpha \in A$.

2: Aus Thema3.1 "$\alpha \in A$" und
aus 1 "$\ldots \forall \beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta = \beta \_\Box\_ o = o \_\Box\_ \beta)$"
folgt: $o \_\Box\_ \alpha = \alpha$.

3: Aus Thema3.1 "$\alpha \in A$" und
aus 2 "$\ldots \forall \beta : (\beta \in A) \Rightarrow ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\beta\}) = o \_\Box\_ \beta)$"
folgt: $(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\alpha\}) = o \_\Box\_ \alpha$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\alpha\}) = \alpha$.

Ergo Thema3.1: **Ah)** "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\alpha\}) = \alpha)$"

3.i): Aus 2
folgt: $$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Rightarrow (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\alpha\} \cup \beta) = (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\beta) \_\Box\_ \alpha.$$

$\Box$

347-3. Auch alteingesessene Induktions-Prinzipien wie **32-9** können ab und zu anwendungsfreundlich aufgefrischt werden.

347-3(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $0 \in E$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap E)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in E)$.

Dann folgt "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq E$*".*

Beweis **347-3**

`Thema0` $(\gamma \in A) \wedge (\delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E)$.

1: Es gilt: $(\gamma \in \delta) \vee (\gamma \notin \delta)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\gamma \in \delta$.

2: Aus `1.1.Fall`“$\gamma \in \delta$” folgt via **308-8**: $\{\gamma\} \cup \delta = \delta$.

3: Aus 2 und aus `Thema0`“$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$” folgt: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$.

`1.2.Fall` $\gamma \notin \delta$.

1.1: Aus `Thema0`“$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$” folgt via **folk**: $\delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

1.2: Aus `Thema0`“$\gamma \in A \ldots$”, aus `1.2.Fall`“$\gamma \notin \delta$”, aus `Thema0`“$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$” und aus →)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E)) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in E)$” folgt: $\{\gamma\} \cup \delta \in E$.

2: Aus `Thema0`“$\gamma \in A \ldots$” und aus 1.1“$\delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$” folgt via **32-5**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

3: Aus 2“$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$” und aus 1.2“$\{\gamma\} \cup \delta \in E$” folgt via **folk**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$.

Ergo `Thema0`:

`A1`	“$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E)) \Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E)$”

...

Beweis **347-3** . . .

1: Via **32-5** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

2: Aus 1"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$" und
aus →)"$0 \in E$"
folgt via **folk**: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$.

3: Aus 2"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E))$
$\Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E)$"
folgt via **32-9**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$.

4: Aus 3"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap E$"
folgt via **158-1**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \subseteq E$.

□

347-4. Zwischendurch wirkt etwas Algebra belebend.

347-4(Satz)

a) *Aus* "o *ist* $\Box$*neutral auf* Q"
und "$\Box$ *tunnelt rechts auf* Q"
folgt "$\Box$ *kommutativ auf* Q".

b) *Aus* "$\Box$ *Funktion*"
und "$Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$"
und "$\Box[Q \times Q] \subseteq Q$"
und "o *ist* $\Box$*neutral auf* Q"
und "$\Box$ *tunnelt rechts auf* Q"
folgt "$\Box$ *assoziativ auf* Q".

c) *Aus* "$\Box$ *Algebra in* A"
und "o *ist* $\Box$*neutral auf* A"
und "$\Box$ *tunnelt rechts auf* A"
folgt "$\Box$ *kommutativ auf* A" *und* "$\Box$ *assoziativ auf* A".

d) *Aus* "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$\Box$ *tunnelt rechts auf* A"
folgt "$(p_\Box q)_\Box r = (p_\Box r)_\Box q$".

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **347-4**</u> `a)` `VS` gleich $(o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } Q) \wedge (\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q)$.

`Thema0` $\gamma, \delta \in Q$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "o ist $\Box$neutral auf $Q\ldots$" und
aus `Thema0`"$\gamma \ldots \in Q$"
folgt via **208-1(Def)**: $o_{-}\Box_{-}\gamma = \gamma$.

`1.2:` Aus →) "o ist $\Box$neutral auf Q" und
aus `Thema0`"$\ldots \delta \in Q$"
folgt via **208-1(Def)**: $o_{-}\Box_{-}\delta = \delta$.

`1.3:` aus →) "o ist $\Box$neutral auf Q"
folgt via **208-1(Def)**: $o \in Q$.

`2:` Aus `1.3`"$o \in Q$",
aus `Thema0`"$\gamma, \delta \in Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **344-1(Def)**: $(o_{-}\Box_{-}\gamma)_{-}\Box_{-}\delta = (o_{-}\Box_{-}\delta)_{-}\Box_{-}\gamma$.

`3:` $\gamma_{-}\Box_{-}\delta \stackrel{1.1}{=} (o_{-}\Box_{-}\gamma)_{-}\Box_{-}\delta \stackrel{2}{=} (o_{-}\Box_{-}\delta)_{-}\Box_{-}\gamma \stackrel{1.2}{=} \delta_{-}\Box_{-}\gamma$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\gamma_{-}\Box_{-}\delta = \delta_{-}\Box_{-}\gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in Q) \Rightarrow (\gamma_{-}\Box_{-}\delta = \delta_{-}\Box_{-}\gamma)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\Box$ kommutativ auf Q.

<u>Beweis **347-4**</u> `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box) \wedge (\Box[Q \times Q] \subseteq Q)$
$\wedge(o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } Q) \wedge (\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots o$ ist $\Box$neutral auf $Q \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\Box$ kommutativ auf Q.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\delta, \epsilon, \phi \in Q$.

`3.1:` Aus `Thema2`"$\ldots \epsilon \ldots \in Q$",
aus `Thema1.2`"$\ldots \phi \in Q$",
aus `Thema1.2`"$\delta \ldots \in Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **344-1(Def)**: $(\epsilon\_\Box\_\phi)\_\Box\_\delta = (\epsilon\_\Box\_\delta)\_\Box\_\phi$.

`3.2:` Aus `Thema2`"$\delta, \epsilon \ldots \in Q$" und
aus `1`"$\Box$ kommutativ auf Q"
folgt via **210-1(Def)**: $\delta\_\Box\_\epsilon = \epsilon\_\Box\_\delta$.

`3.3:` Aus `Thema2`"$\ldots \epsilon \ldots \in Q$" und
aus `Thema2`"$\ldots \phi \in Q$"
folgt via **folk**: $(\epsilon, \phi) \in Q \times Q$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion$\ldots$",
aus `3.3`"$(\epsilon, \phi) \in Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box \ldots$"
folgt via **18-27**: $\Box((\epsilon, \phi)) \in Q$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\epsilon\_\Box\_\phi \in Q$.

`6:` Aus `1`"$\Box$ kommutativ auf Q",
aus `Thema2`"$\delta \ldots \in Q$" und
aus `5`"$\epsilon\_\Box\_\phi \in Q$"
folgt via **210-1(Def)**: $\delta\_\Box\_(\epsilon\_\Box\_\phi) = (\epsilon\_\Box\_\phi)\_\Box\_\delta$.

`7:` $\delta\_\Box\_(\epsilon\_\Box\_\phi) \stackrel{6}{=} (\epsilon\_\Box\_\phi)\_\Box\_\delta \stackrel{3.1}{=} (\epsilon\_\Box\_\delta)\_\Box\_\phi \stackrel{3.2}{=} (\delta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\phi$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\delta\_\Box\_(\epsilon\_\Box\_\phi) = (\delta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\phi$.

Ergo `Thema2`: $\forall \delta, \epsilon, \phi : (\delta, \epsilon, \phi \in Q) \Rightarrow (\delta\_\Box\_(\epsilon\_\Box\_\phi) = (\delta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\phi)$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: $\Box$ assoziativ auf Q.

Beweis **347-4** `c)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } A)$
$\wedge(\Box \text{ tunnelt rechts auf } A)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A\ldots$"
folgt via **93-6**: $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A) \wedge (\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)$.

`1.2:` aus `VS` gleich "$\ldots o$ ist $\Box$neutral auf $A\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\Box$ tunnelt rechts auf A"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{\Box \text{ kommutativ auf } A}$

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{dom}\,\Box = A \times A\ldots$"
folgt via **folk**: $A \times A \subseteq \mathsf{dom}\,A$.

`2.2:` Via **8-10** gilt: $\Box[A \times A] \subseteq \mathsf{ran}\,\Box$.

`3:` Aus `2.2`"$\Box[A \times A] \subseteq \mathsf{ran}\,\Box$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{ran}\,\Box \subseteq A$"
folgt via **folk**: $\Box[A \times A] \subseteq A$.

`4:` Aus `1.1`"$\Box$ Funktion",
aus `2.1`"$A \times A \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$",
aus `3`"$\Box[A \times A] \subseteq A$",
aus `VS` gleich "o ist $\Box$neutral auf A" und
aus `VS` gleich "$\ldots\Box$ tunnelt rechts auf A"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{\Box \text{ assoziativ auf } A}$

`d)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\Box \text{ tunnelt rechts auf } A)$.

`1:` Es gilt: $(p, q, r \in A) \vee (p \notin A) \vee (q \notin A) \vee (r \notin A)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p, q, r \in A$.

Aus `VS` gleich "$\ldots\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus `1.1.Fall`"$p, q, r \in A$"
folgt via **344-1(Def)**: $(p\_\Box\_q)\_\Box\_r = (p\_\Box\_r)\_\Box\_q$.

...

<u>Beweis **374-4**</u> `d)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\Box \text{ tunnelt rechts auf } A)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $p \notin A$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$p \notin A$"
folgt via **93-13**: $p \_\Box\_ q = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$p \notin A$"
folgt via **93-13**: $p \_\Box\_ r = \mathcal{U}$.

`3:` $(p \_\Box\_ q) \_\Box\_ r \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \_\Box\_ r \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U} \_\Box\_ q \stackrel{2.2}{=} (p \_\Box\_ r) \_\Box\_ q$.

`1.3.Fall` $q \notin A$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1.3.Fall` "$q \notin A$"
folgt via **93-13**: $p \_\Box\_ q = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1.3.Fall` "$q \notin A$"
folgt via **93-13**: $(p \_\Box\_ r) \_\Box\_ q = \mathcal{U}$.

`3:` $(p \_\Box\_ q) \_\Box\_ r \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \_\Box\_ r \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (p \_\Box\_ r) \_\Box\_ q$.

`1.4.Fall` $r \notin A$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1.4.Fall` "$r \notin A$"
folgt via **93-13**: $(p \_\Box\_ q) \_\Box\_ r = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1.4.Fall` "$r \notin A$"
folgt via **93-13**: $p \_\Box\_ r = \mathcal{U}$.

`3:` $(p \_\Box\_ q) \_\Box\_ r \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U} \_\Box\_ q \stackrel{2.2}{=} (p \_\Box\_ r) \_\Box\_ q$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(p \_\Box\_ q) \_\Box\_ r = (p \_\Box\_ r) \_\Box\_ q$.

$\Box$

347-5. Auch etwas elementare Klassen-Algebra kann nicht schaden.

347-5(Satz)

a) *Aus* "$p \in x$" *folgt* "$\{p\} \cap x = \{p\}$".

b) *Aus* "$p \notin x$" *und* "$p \in y$" *folgt* "$(\{p\} \cup x) \cup y = x \cup y$" *und* "$(\{p\} \cup x) \cap y = \{p\} \cup (x \cap y)$".

c) *Aus* "$p \notin y$" *folgt* "$(\{p\} \cup x) \cap y = x \cap y$".

d) *Aus* "$E \cup D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$" *folgt* "$E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$".

e) "$E \cup D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$" *genau dann, wenn* "$E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$".

Beweis **347-5** a) VS gleich $p \in x$.

1: Aus VS gleich "$p \in x$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

2: Aus 1"$\{p\} \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $\{p\} \cap x = \{p\}$.

b) VS gleich $(p \notin x) \wedge (p \in y)$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots p \in y$"
folgt via **308-8**: $\{p\} \cup y = y$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots p \in y$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\{p\} \cap y = \{p\}$.

2.1: $(\{p\} \cup x) \cup y \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \cup \{p\}) \cup y \stackrel{\mathbf{AG}\cup}{=} x \cup (\{p\} \cup y) \stackrel{1.1}{=} x \cup y$.

2.2: $(\{p\} \cup x) \cap y \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (\{p\} \cap y) \cup (x \cap y) \stackrel{1.2}{=} \{p\} \cup (x \cap y)$.

c) VS gleich $p \notin y$.

1: Aus VS gleich "$p \notin y$"
folgt via **2-30**: $\{p\} \cap y = 0$.

2: $(\{p\} \cup x) \cap y \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (\{p\} \cap y) \cup (x \cap y) \stackrel{1}{=} 0 \cup (x \cap y) \stackrel{\mathbf{folk}}{=} x \cap y$.

Beweis **347-5** `d)` `VS` gleich $E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

`1:` Via **folk** gilt: $E, D \subseteq E \cup D$.

`2.1:` Aus `1`"$E \ldots \subseteq E \cup D$" und
aus `VS` gleich "$E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"

folgt via **32-5**: $\boxed{E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)}$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots D \subseteq E \cup D$" und
aus `VS` gleich "$E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"

folgt via **32-5**: $\boxed{D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)}$

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$(E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Rightarrow (E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)).$$

`1.2:` Via **32-5** gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Rightarrow (E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Leftrightarrow (E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

$\square$

347-6. Für eine Algebra in A, die in A sowohl kommutativ als auch assoziativ ist, gelten vielerley Rechenregeln.

347-6(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) $\Box$ *kommutativ auf* A.

$\rightarrow$) $\Box$ *assoziativ auf* A.

Dann folgt "$p_\Box(q_\Box r) = (q_\Box p)_\Box r$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **347-6**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra in A" und
aus $\rightarrow$) "$\Box$ assoziativ auf A"
folgt via **340-12**: $p_\Box(q_\Box r) = (p_\Box q)_\Box r$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra in$A$" und
aus $\rightarrow$) "$\Box$ kommutativ auf A"
folgt via **340-12**: $p_\Box q = q_\Box p$.

`2:` $p_\Box(q_\Box r) \stackrel{1.1}{=} (p_\Box q)_\Box r \stackrel{1.2}{=} (q_\Box p)_\Box r$.

$\Box$

347-7. Der Nachweis von $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \subseteq \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), \square, E)$ für geeignete $o, \square, E$ wird in Einzelschritte zerlegt.

347-7(Satz) *Es gelte:*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\square$ *tunnelt rechts auf* A.

→) o *ist* $\square$*neutral auf* A.

→) $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

Dann folgt:

a) $0 \in \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square)$.

b) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square)\,))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square)\,)$.

c) $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \subseteq \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square)$.

ALG-**Notation**.

$\mathsf{347.0}(x, E, M) = \{\omega : x(\omega \cup E)\_M\_x(\omega \cap E) = x(\omega)\_M\_x(E)\}$

<u>Beweis **347-7**</u>

`1.1:` Aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"
folgt via **208-1(Def)**: $\forall \gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow (\gamma = \gamma_{\_}\Box_{\_}o = o_{\_}\Box_{\_}\gamma)$.

`1.2:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"
folgt via **347-2**: $\forall \gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\}) = \gamma)$.

`1.3:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"
folgt via **347-2**: $o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$.

`1.4:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"
folgt via **347-2**: $(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(0) = o$.

`1.5:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"
folgt via **347-2**:
$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\delta)_{\_}\Box_{\_}\gamma)$.

`1.6:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A" und
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A"
folgt via **347-4**: $\Box$ assoziativ auf A.

`1.7:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

...

<u>Beweis</u> **347-7** . . .

`2:` Aus `1.3`“ $\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$ ” und
aus →) “ $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ ”
folgt via **folk**: $$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E) \in A.$$

`3.1:` Aus `2`“ $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E) \in A$ ” und
aus `1.1`“ $\forall \gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow (\gamma = \gamma\_\Box\_o = o\_\Box\_\gamma))$ ”
folgt: $$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E) = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)\_\Box\_o.$$

`3.2:` Aus `2`“ $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E) \in A$ ” und
aus `1.1`“ $\forall \gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow (\gamma = \gamma\_\Box\_o = o\_\Box\_\gamma))$ ”
folgt: $$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E) = o\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E).$$

`4:`
$$\begin{aligned}
(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0 \cup E)_\Box_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0 \cap E) &\overset{\mathbf{folk}}{=} (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)_\Box_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0 \cap E)\\
&\overset{\mathbf{folk}}{=} (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)_\Box_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0)\\
&\overset{1.4}{=} (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)_\Box_o\\
&\overset{3.1}{=} (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)\\
&\overset{3.2}{=} o_\Box_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)\\
&\overset{1.4}{=} (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0)_\Box_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E).
\end{aligned}$$

`5.a):` Aus `4`“ $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0 \cup E)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0 \cap E) = \ldots = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)$ ” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“ 0 Menge”
folgt **p.def.**: $$0 \in \mathsf{347.0}((\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}), E, \Box).$$

. . .

Beweis **347-7** . . .

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box))$.

`7.1:` Aus `Thema6`“ . . . $\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box)$ ”
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`7.2:` Aus `Thema6`. . . $\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box)$
folgt via **folk**: $(\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \wedge (\beta \in \mathsf{347.0}((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box))$.

`7.3:` Aus `Thema6`“ . . . $\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ . . . ”
folgt via **32-5**: $\beta \cap E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

`7.4:` Aus `Thema6`“ . . . $\alpha \notin \beta$ . . . ”
folgt via **2-3**: $\alpha \notin \beta \cap E$.

`7.5:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” und
aus →) “ $\Box$ tunnelt rechts auf A ”
folgt via **347-4**:

$$((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E))\_\Box\_\alpha = ((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta)\_\Box\_\alpha)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E).$$

`7.6:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” und
aus →) “ $\Box$ tunnelt rechts auf A ”
folgt via **347-4**:

$$((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E))\_\Box\_\alpha = ((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E)\_\Box\_\alpha)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E).$$

`7.7:` Aus `Thema6`“ . . . $\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ . . . ” und
aus →) “ $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ ”
folgt via **32-5**: $\beta \cup E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

`7.8:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” und
aus `1.6`“ $\Box$ assoziativ auf A ”
folgt via **340-12**:

$$(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E))\_\Box\_((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E)\_\Box\_\alpha) = ((o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E))\_\Box\_\alpha.$$

. . .

. . .

Beweis **347-7** ...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box))$.

...

8.1: Aus 7.2 "$\ldots \beta \in 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box)$"
folgt **p.def.**:

$$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E).$$

8.2: Aus Thema6 "$\alpha \in A \ldots$",
aus 7.4 "$\alpha \notin \beta \cap E$",
aus 7.3 "$\beta \cap E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 1.5 "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)))$
$\Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box}(\delta))\_\Box\_\gamma)$"
folgt:

$$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup (\beta \cap E)) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E)\_\Box\_\alpha.$$

8.3: Aus 7.1 "β Menge"
folgt via **2-28**: $\{\alpha\} \cup \beta$ Menge.

8.4: Aus Thema6 "$(\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \ldots$" und
aus 1.5 "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)))$
$\Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\delta))\_\Box\_\gamma$"
folgt: $(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup \beta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta)\_\Box\_\alpha$.

9: Es gilt: $(\alpha \in E) \vee (\alpha \notin E)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

Beweis **347-7** . . .

`Thema6` $(\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square), E, \square)\,)$.

. . .

`Fallunterscheidung`

`9.1.Fall` $\alpha \in E$.

`10.1:` Aus `Thema6`“$\ldots \alpha \notin \beta \ldots$” und
aus `9.1.Fall`“$\alpha \in E$”
folgt via **347-5**: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cup E = \beta \cup E$.

`10.2:` Aus `Thema6`“$\ldots \alpha \notin \beta \ldots$” und
aus `9.1.Fall`“$\alpha \in E$”
folgt via **347-5**: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cap E = \{\alpha\} \cup (\beta \cap E)$.

`11:` $(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)((\{\alpha\} \cup \beta) \cup E)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)$

$\overset{10.1}{=} (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta \cup E)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)$

$\overset{10.2}{=} (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta \cup E)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\{\alpha\} \cup (\beta \cap E))$

$\overset{8.2}{=} (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta \cup E)\_\square\_((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta \cap E)\_\square\_\alpha)$

$\overset{7.8}{=} ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta \cup E)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta \cap E))\_\square\_\alpha$

$\overset{8.1}{=} ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(E))\_\square\_\alpha$

$\overset{7.5}{=} ((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\beta)\_\square\_\alpha)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(E)$

$\overset{8.4}{=} (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\{\alpha\} \cup \beta)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(E))$.

`12:` Aus `11`“$(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)((\{\alpha\} \cup \beta) \cup E)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)$
$= \ldots = (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square)(\{\alpha\} \cup \beta)\_\square\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square(E))$” und
aus `8.3`“$\{\alpha\} \cup \beta$ Menge”
folgt **p.def.**: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}((o\overset{\mathsf{fin}}{,}\square), E, \square)\,$.

. . .

. . .

<u>Beweis</u> **347-7** ...

`Thema6` $(\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box)\,).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`9.2.Fall` $\alpha \notin E.$

`10.1:` Aus →) "$\ldots \alpha \notin \beta \ldots$" und
aus `9.2.Fall` "$\alpha \notin E$"
folgt via **2-3**: $\alpha \notin \beta \cup E.$

`10.2:` Aus `9.2.Fall` "$\alpha \notin E$"
folgt via **347-5**: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cap E = \beta \cap E.$

`11:` Aus `Thema6` "$\alpha \in A \ldots$",
aus `10.1` "$\alpha \notin \beta \cup E$",
aus `7.7` "$\beta \cup E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus `1.5` "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)))$
$\Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\delta))\_\Box\_\gamma$"
folgt: $(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup (\beta \cup E)) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E)\_\Box\_\alpha.$

`12:` $(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})((\{\alpha\} \cup \beta) \cup E)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)$

$\overset{\mathbf{AG}\cup}{=} (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup (\beta \cup E))\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)$

$\overset{10.2}{=} (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup (\beta \cup E))\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E)$

$\overset{11}{=} ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E)\_\Box\_\alpha)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E)$

$\overset{7.6}{=} ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cup E)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta \cap E))\_\Box\_\alpha$

$\overset{8.1}{=} ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E))\_\Box\_\alpha$

$\overset{7.5}{=} ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta)\_\Box\_\alpha)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)$

$\overset{8.4}{=} (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup \beta)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)).$

`13:` Aus `12` "$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})((\{\alpha\} \cup \beta) \cup E)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)$
$= \ldots = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup \beta)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box}(E))$" und
aus `8.3` "$\{\alpha\} \cup \beta$ Menge"
folgt **p.def.**: $\{\alpha\} \cup \beta \in 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\Box}), E, \Box)\,.$

...

...

Beweis **347-7** ...

Thema6 $(\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square))$.

...

Fallunterscheidung

...

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square).$$

Ergo Thema6:

Ab) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square))$"

7.c): Aus 5.a) "$0 \in \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square)$" und
aus Ab) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square))$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square))$"
folgt via **347-3**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathsf{347.0}((o, \overset{\mathsf{fin}}{\square}), E, \square)$.

$\square$

347-8. Wie angedeutet, ist **347-7** ein Zwischenschritt zum Beweis des Hauptresultats dieses Essays. Ein weiterer Übergang besteht in der Verifikation des Übergangs "meiner Lieblingsformel" zu $\Box$_Gewichten auf $\mathfrak{M}$.

347-8(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\mathfrak{M} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathfrak{M}) \Rightarrow (\phi(\alpha \cup \beta)\_\Box\_\phi(\alpha \cap \beta) = \phi(\alpha)\_\Box\_\phi(\beta))$.

→) $\phi(0)$ *ist* $\Box$*neutral auf* $\phi[\mathfrak{M}]$.

Dann folgt "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **347-8**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathfrak{M}) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma, \delta \in \mathfrak{M} \ldots$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathfrak{M})$
$\Rightarrow (\phi(\alpha \cup \beta)\_\square\_\phi(\alpha \cap \beta) = \phi(\alpha)\_\square\_\phi(\beta))$"
folgt: $\phi(\gamma \cup \delta)\_\square\_\phi(\gamma \cap \delta) = \phi(\gamma)\_\square\_\phi(\delta)$.

`3.1:` Aus 2 und
aus `Thema1.1`"$\ldots \gamma \cap \delta = 0$"
folgt: $\phi(\gamma \cup \delta)\_\square\_\phi(0) = \phi(\gamma)\_\square\_\phi(\delta)$.

`3.2:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus `Thema1.1`"$\ldots \gamma \cup \delta \in \mathfrak{M} \ldots$" und
aus →) "$\mathfrak{M} \subseteq \mathsf{dom}\, \phi$"
folgt via **18-27**: $\phi(\gamma \cup \delta) \in \phi[\mathfrak{M}]$.

`4:` Aus →) "$\phi(0)$ ist $\square$neutral auf $\phi[\mathfrak{M}]$" und
aus `3.2`"$\phi(\gamma \cup \delta) \in \phi[\mathfrak{M}]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\phi(\gamma \cup \delta)\_\square\_\phi(0) = \phi(\gamma \cup \delta)$.

`5:` Aus `3.1` und
aus `4`
folgt: $\phi(\gamma \cup \delta) = \phi(\gamma)\_\square\_\phi(\delta)$.

Ergo `Thema1.1`:

$$\texttt{A1} \Big| \text{“}\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathfrak{M}) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)) \Rightarrow (\phi(\gamma \cup \delta) = \phi(\gamma)\_\square\_\phi(\delta))\text{”}$$

`1.2:` Aus →) "ϕ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathfrak{M}) \wedge (\gamma \cap \delta = 0))$
$\Rightarrow (\phi(\gamma \cup \delta) = \phi(\gamma)\_\square\_\phi(\delta))$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ ist $\square_$Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

$\square$

347-9. Aussagen **347-7,8** warten geradezu darauf, zusammen gesetzt zu werden.

347-9(Satz) *Es gelte:*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\square$ *tunnelt rechts auf* A.

→) o *ist* $\square$*neutral auf* A.

Dann folgt:

a) $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$
$$\Rightarrow ((o,\overset{\mathsf{fin}}{}\square)(\alpha\cup\beta)\_\square\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{}\square)(\alpha\cap\beta) = (o,\overset{\mathsf{fin}}{}\square)(\alpha)\_\square\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{}\square)(\beta)).$$

b) $o,\overset{\mathsf{fin}}{}\square$ *ist* $\square$_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

ALG-Notation.

Beweis **347-9**

$$347.0(x,E,M) = \{\omega : x(\omega\cup E)\_M\_x(\omega\cap E) = x(\omega)\_M\_x(E)\}$$

...

Beweis **347-9** ...

`Thema1.1` $\delta, \epsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$

2: Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A",
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A" und
aus `Thema1.1` "$\ldots \epsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
folgt via **347-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box), \epsilon, \Box)$.

3: Aus `Thema1.1` "$\delta \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 2 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box), \epsilon, \Box)$"
folgt via **folk**: $\delta \in 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box), \epsilon, \Box)$.

4: Aus 3 "$\delta \in 347.0((o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box), \epsilon, \Box)$"
folgt **p.def.**:
$$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\delta \cup \epsilon)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\delta \cap \epsilon) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\delta)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\epsilon).$$

Ergo `Thema1.1`:

`Aa)` "$\forall \delta, \epsilon : (\delta, \epsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$
$\Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\delta \cup \epsilon)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\delta \cap \epsilon) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\delta)\_\Box\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(\epsilon))$"

1.2: Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A",
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A" und
aus `Thema1.1` "$\ldots \epsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
folgt via **347-2**: $o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box$ Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box) \subseteq A$

$\wedge$ $(o, \overset{\mathsf{fin}}{\,}\Box)(0) = o$.

1.3: Via **32-5** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

...

<u>Beweis</u> **347-9** ...

`2.1:` Aus `1.2` "$\ldots \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \ldots$"
folgt via **folk**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$.

`2.2:` Aus `1.2` "$\ldots (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0) = o$" und
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"
folgt: $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0)$ ist $\Box$neutral auf A.

`2.3:` Via **8-10** gilt: $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)] \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$.

`3.1:` Aus `1.2` "$\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ Funktion",
aus `1.3` "$0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus `2.1` "$\ldots \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$"
folgt via **18-27**: $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0) \in (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)]$.

`3.2:` Aus `2.3` "$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)] \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$" und
aus `1.2` "$\ldots \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}) \subseteq A \ldots$"
folgt via **folk**: $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)] \subseteq A$.

`4:` Aus `2.2` "$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0)$ ist $\Box$neutral auf A",
aus `3.1` "$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0) \in (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)]$" und
aus `3` "$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)] \subseteq A$"
folgt via **208-4**: $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0)$ ist $\Box$neutral auf $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)]$.

`5.b):` Aus `1.2` "$\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ Funktion...",
aus `2.1` "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$",
aus `Aa)` "$\forall \delta, \epsilon : (\delta, \epsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$
$\Rightarrow ((\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(\delta \cup \epsilon)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(\delta \cap \epsilon) = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(\delta)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(\epsilon))$" und
aus `4` "$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(0)$ ist $\Box$neutral auf $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)]$"
folgt via **247-8**: $\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

$\Box$

347-10. Hier soll die Wirkung eines $\Box$_Gewichts auf Singeltons und ungeordnete Paare untersucht werden.

347-10(Satz)

a) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$"
und "$0, \{p\} \in \mathfrak{M}$"
folgt "$\phi(\{p\}) = \phi(\{p\})\_\Box\_\phi(0) = \phi(0)\_\Box\_\phi(\{p\})$".

b) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$"
und "$\{p\}, \{q\}, \{p, q\} \in \mathfrak{M}$"
und "$p \neq q$"
folgt "$\phi(\{p, q\}) = \phi(\{p\}\_\Box\_\phi(\{q\}) = \phi(\{q\})\_\Box\_\phi(\{p\})$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **347-10**</u> `a)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \square\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (0, \{p\} \in \mathfrak{M})$.

`1.1:` Via **folk** gilt: $0 \cup \{p\} = \{p\}$.

`1.2:` Via **folk** gilt: $\{p\} \cup 0 = \{p\}$.

`1.3:` Via **folk** gilt: $0 \cap \{p\} = 0$.

`1.4:` Via **folk** gilt: $\{p\} \cap 0 = 0$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \in \mathfrak{M}$"
folgt: $0 \cup \{p\} \in \mathfrak{M}$.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \in \mathfrak{M}$"
folgt: $\{p\} \cup 0 \in \mathfrak{M}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0, \{p\} \in \mathfrak{M}$",
aus `2.1`"$0 \cup \{p\} \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.3`"$0 \cap \{p\} = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(0 \cup \{p\}) = \phi(0)\_\square\_\phi(\{p\})$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \in \mathfrak{M}$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \ldots \in \mathfrak{M}$",
aus `2.2`"$\{p\} \cup 0 \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.4`"$\{p\} \cap 0 = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(\{p\} \cup 0) = \phi(\{p\})\_\square\_\phi(0)$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `1.1`
folgt: $\boxed{\phi(\{p\}) = \phi(0)\_\square\_\phi(\{p\})}$

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `1.2`
folgt: $\boxed{\phi(\{p\}) = \phi(\{p\})\_\square\_\phi(0)}$

<u>Beweis **347-10**</u> `b)`

`VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (\{p\}, \{q\}, \{p,q\} \in \mathfrak{M}) \wedge (p \neq q)$.

`1.1:` Via **4-11** gilt: $\{p\} \cup \{q\} = \{p,q\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \neq q$"
folgt via **2-33**: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p,q\} \in \mathfrak{M} \ldots$"
folgt: $\{p\} \cup \{q\} \in \mathfrak{M}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\}, \{q\} \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$",
aus 2"$\{p\} \cup \{q\} \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.2`"$\{p\} \cap \{q\} = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(\{p\} \cup \{q\}) = \phi(\{p\})\_\Box\_\phi(\{q\})$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\}, \{q\} \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$",
aus 2"$\{p\} \cup \{q\} \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.2`"$\{p\} \cap \{q\} = 0$"
folgt via **346-3**: $\boxed{\phi(\{p\})\_\Box\_\phi(\{q\}) = \phi(\{q\})\_\Box\_\phi(\{p\}).}$

`4:` Aus `3.1` und
aus `1.1`
folgt: $\boxed{\phi(\{p,q\}) = \phi(\{p\})\_\Box\_\phi(\{q\})}$

$\Box$

347-11. Gleichsam als Nebenprodukt soll nun $(o, \overset{\mathsf{fin}}{\square})(\{p, q\})$ unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen untersucht werden.

347-11(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\square$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) A *Menge.*

$\rightarrow$) $\square$ *tunnelt rechts auf* A.

$\rightarrow$) o *ist* $\square$*neutral auf* A.

$\rightarrow$) $p, q \in A$.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

Dann folgt "$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\square})(\{p, q\}) = p_{-}\square_{-}q = q_{-}\square_{-}p$".

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **347-11**</u>

1.1: Aus →) “$p, q \in A$”
folgt via **223-1**: $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

1.2: Aus →) “$p, q \in A$”
folgt via **32-5**: $\{p\}, \{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

1.3: Aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **347-9**: $o,\overset{\text{fin}}{\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

1.4: Aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **347-2**: $\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow ((o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{\alpha\}) = \alpha)$.

2.1: Aus 1.2“$o,\overset{\text{fin}}{\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$”,
aus 1.2“$\{p\}, \{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$”,
aus 1.1“$\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$” und
aus →) “$p \neq q$”
folgt via **347-10**:

$$(o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{p, q\}) = (o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{p\})\_\Box\_(o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{q\}) = (o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{q\})\_\Box\_(o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{p\}).$$

2.2: Aus →) “$p \ldots \in A$” und
aus 1.4“$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow ((o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{\alpha\}) = \alpha)$”
folgt: $(o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{p\}) = p$.

2.3: Aus →) “$\ldots q \in A$” und
aus 1.4“$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow ((o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{\alpha\}) = \alpha)$”
folgt: $(o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{q\}) = q$.

3: Aus 2.1,
aus 2.2 und
aus 2.3
folgt: $(o,\overset{\text{fin}}{\Box})(\{p, q\}) = p\_\Box\_q = q\_\Box\_p$.

$\Box$

347-12. Die neben "ϕ Funktion" definierende Eigenschaft von $\Box$_Gewichten auf $\mathfrak{M}$ kann gelegentlich generell eingesetzt werden.

347-12(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi$.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

→) $A \cap B = 0$

Dann folgt:

a) $\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

b) $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

ALG-**Notation**:

Beweis **347-12** a)

1: Es gilt: $(A, B \in \mathsf{dom}\,\phi) \vee (A \notin \mathsf{dom}\,\phi) \vee (B \notin \mathsf{dom}\,\phi)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $A, B \in \mathsf{dom}\,\phi$.

2: Aus `1.1.Fall` "$A, B \in \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt: $A \cup B \in \mathsf{dom}\,\phi$.

3: Aus →) "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$",
aus `1.1.Fall` "$A, B \in \mathsf{dom}\,\phi$",
aus 2 "$A \cup B \in \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus →) "$A \cap B = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\square\_\phi(B)$.

`1.2.Fall` $A \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

2.1: Aus `1.2.Fall` "$A \notin \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt: $A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

2.2: Aus `1.2.Fall` "$A \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A) = \mathcal{U}$.

3: Aus 2.1 "$A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A \cup B) = \mathcal{U}$.

4: $\phi(A \cup B) \stackrel{3}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}\_\square\_\phi(B) \stackrel{2.2}{=} \phi(A)\_\square\_\phi(B)$.

5: Aus 4
folgt: $\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\square\_\phi(B)$.

`1.3.Fall` $B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

2.1: Aus `1.3.Fall` "$B \notin \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt: $A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

2.2: Aus `1.3.Fall` "$B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(B) = \mathcal{U}$.

3: Aus 2.1 "$A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A \cup B) = \mathcal{U}$.

4: $\phi(A \cup B) \stackrel{3}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{folk}}{=} \phi(A)\_\square\_\mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} \phi(A)\_\square\_\phi(B)$.

5: Aus 4
folgt: $\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\square\_\phi(B)$.

...

<u>Beweis **347-12**</u> `a)` ...

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B).$$

`b)`

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $$B \cap A = A \cap B.$$

`2:` Aus `1` und
aus →) “ $A \cap B = 0$ ”
folgt: $$B \cap A = 0.$$

`3.1:` Aus →) “ ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$ ” ,
aus →) “ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$ ” und
aus →) “ $A \cap B = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $$\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B).$$

`3.2:` Aus →) “ ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$ ” ,
aus →) “ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$ ” und
aus `2` “ $B \cap A = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $$\phi(B \cup A) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A).$$

`4:` Via **KG**$\cup$ gilt: $$B \cup A = A \cup B.$$

`5:` Aus `3.2` und
aus `4`
folgt: $$\phi(A \cup B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A).$$

`6:` Aus `3.1` und
aus `5`
folgt: $$\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A).$$

$\Box$

347-13. Die Kommutativität von **347-12** kann auch via **346-13** hergestellt werden.

347-13(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi$.

→) $\mathsf{dom}\,\phi$ *Mengenring.*

→) $\Box$ *assoziativ auf* $\mathsf{ran}\,\phi$.

Dann folgt "$\phi(A)_\Box_\phi(B) = \phi(B)_\Box_\phi(A)$".

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **347-13**</u>

1.1: Via **folk** gilt: $\mathsf{dom}\,\phi \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

1.2: Via **8-10** gilt: $\phi[\mathsf{dom}\,\phi] = \mathsf{ran}\,\phi$.

2.1: Aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$" und
aus 1.1
folgt: ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

2.2: Aus →) "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$" und
aus 1.2
folgt: $\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathsf{dom}\,\phi]$.

3: Es gilt: $(A, B \in \mathsf{dom}\,\phi) \vee (A \notin \mathsf{dom}\,\phi) \vee (B \notin \mathsf{dom}\,\phi)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $A, B \in \mathsf{dom}\,\phi$.

Aus →) "$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring",
aus 2.1 "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$",
aus 2.2 "$\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathsf{dom}\,\phi]$" und
aus 3.1.Fall "$A, B \in \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **346-13**: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`3.2.Fall` $A \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

4: Aus 3.2.Fall "$A \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A) = \mathcal{U}$.

5: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) \stackrel{4}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\phi(B) \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{folk}}{=} \phi(B)\_\Box\_\mathcal{U} \stackrel{4}{=} \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

6: Aus 5
folgt: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`3.3.Fall` $B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

4: Aus 3.3.Fall "$B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(B) = \mathcal{U}$.

5: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) \stackrel{4}{=} \phi(A)\_\Box\_\mathcal{U} \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\phi(A) \stackrel{4}{=} \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

6: Aus 5
folgt: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A).$$

$\Box$

347-14. Mit etwas mehr Aufwand als in **347-12** ist eine generelle Verfügbarkeit "meiner Lieblingsformel" herzustellen.

347-14(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *ist* $\square$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi$.

→) $\mathsf{dom}\,\phi$ *Mengenring.*

→) $\square$ *assoziativ auf* $\mathsf{ran}\,\phi$.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

Dann folgt:

a) $\phi(A)\_\square\_\phi(B) = \phi(B)\_\square\_\phi(A)$.

b) $\phi(A \cup B)\_\square\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\square\_\phi(B)$.

c) $\phi(A \cup B)\_\square\_\phi(A \cap B) = \phi(B)\_\square\_\phi(A)$.

d) $\phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\square\_\phi(B)$.

e) $\phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cup B) = \phi(B)\_\square\_\phi(A)$.

`ALG`-**Notation**:

Beweis **347-14** a)
Aus →) "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$" ,
aus →) "$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengering" und
aus →) "$\square$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt via **347-13**: $\phi(A)\_\square\_\phi(B) = \phi(B)\_\square\_\phi(A)$.

Beweis **347-14** `b)`

`1.1:` Via **folk** gilt: $\mathsf{dom}\,\phi \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

`1.2:` Via **8-10** gilt: $\phi[\mathsf{dom}\,\phi] = \mathsf{ran}\,\phi$.

`2.1:` Aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$" und
aus `1.1`
folgt: ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

`2.2:` Aus →) "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$" und
aus `1.2`
folgt: $\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathsf{dom}\,\phi]$.

`3:` Es gilt: $(A, B \in \mathsf{dom}\,\phi) \vee (A \notin \mathsf{dom}\,\phi) \vee (B \notin \mathsf{dom}\,\phi)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $A, B \in \mathsf{dom}\,\phi$.

Aus →) "$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring",
aus `2.1` "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$",
aus `2.2` "$\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathsf{dom}\,\phi]$" und
aus `3.1.Fall` "$A, B \in \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **346-13**: $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`3.2.Fall` $A \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "$A \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3.2.Fall` "$A \notin \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt: $(A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi) \vee (A \cap B \notin \mathsf{dom}\,\phi)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

`6:` Aus `5.1.Fall` "$A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A \cup B) = \mathcal{U}$.

`7:` $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) \stackrel{6}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\phi(A \cap B) \stackrel{\text{folk}}{=} \mathcal{U}$
$\stackrel{\text{folk}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\phi(B) \stackrel{4}{=} \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

...

...

<u>Beweis **347-14**</u> `b)` ...

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $A \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $A \cap B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

`6:` Aus `5.2.Fall` "$A \cap B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A \cap B) = \mathcal{U}$.

`7:` $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) \stackrel{6}{=} \phi(A \cap B)\_\Box\_\mathcal{U} \stackrel{\text{folk}}{=} \mathcal{U}$
$\stackrel{\text{folk}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\phi(B) \stackrel{4}{=} \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

...

<u>Beweis</u> **347-14** `b)` ...

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

`4:` Aus `3.3.Fall` "$B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(B) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3.3.Fall` "$A \notin \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt: $(A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi) \vee (A \cap B \notin \mathsf{dom}\,\phi)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{5.1.Fall}}$ $A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

`6:` Aus `5.1.Fall` "$A \cup B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A \cup B) = \mathcal{U}$.

`7:` $\phi(A \cup B)_\sqcup\Box_\sqcup\phi(A \cap B) \stackrel{6}{=} \mathcal{U}_\sqcup\Box_\sqcup\phi(A \cap B) \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}$
$\stackrel{\textbf{folk}}{=} \phi(A)_\sqcup\Box_\sqcup\mathcal{U} \stackrel{4}{=} \phi(A)_\sqcup\Box_\sqcup\phi(B)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\phi(A \cup B)_\sqcup\Box_\sqcup\phi(A \cap B) = \phi(A)_\sqcup\Box_\sqcup\phi(B)$.

...

...

Beweis **347-14** `b)` ...

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $A \cap B \notin \mathsf{dom}\,\phi$.

6: Aus `5.2.Fall` "$A \cap B \notin \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\phi(A \cap B) = \mathcal{U}$.

7: $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) \stackrel{6}{=} \phi(A \cap B)\_\Box\_\mathcal{U} \stackrel{\text{folk}}{=} \mathcal{U}$
$\stackrel{\text{folk}}{=} \phi(A)\_\Box\_\mathcal{U} \stackrel{4}{=} \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

8: Aus 7
folgt: $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

<u>Beweis</u> **347-14** `cde)`

`1.1:` Aus →) “ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$”,
aus →) “$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring”,
aus →) “$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{dom}\,\phi$” und
aus →) “$\forall\alpha,\beta : (\alpha\cup\beta, \alpha\cap\beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`1.2:` Aus →) “ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$”,
aus →) “$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring”,
aus →) “$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{dom}\,\phi$” und
aus →) “$\forall\alpha,\beta : (\alpha\cup\beta, \alpha\cap\beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cup B) = \phi(A\cup B)\_\Box\_\phi(A\cap B)$.

`1.3:` Aus →) “ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$”,
aus →) “$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring”,
aus →) “$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{dom}\,\phi$” und
aus →) “$\forall\alpha,\beta : (\alpha\cup\beta, \alpha\cap\beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\phi(A\cup B)\_\Box\_\phi(A\cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`2.c):` Aus `1.3` und
aus `1.1`
folgt: $\phi(A\cup B)\_\Box\_\phi(A\cap B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`2.d):` Aus `1.3` und
aus `1.2`
folgt: $\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cup B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`3.e):` Aus `2.d)` und
aus `1.1`
folgt: $\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cup B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

$\Box$

347-15 Die “Zusatzvoraussetzungen ” von **347-12,14** sind zumindest auf vier prominenten Mengenringen erfüllt. Die Aussagen `bdfh)` sind nicht bestmöglich formuliert. Statt dessen soll eine schnelle Anwendung von **347-12,14** möglich sein.

347-15(Satz)

`a)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))\Leftrightarrow(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

`b)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta,\alpha\cap\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

`c)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}})\Leftrightarrow(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

`d)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta,\alpha\cap\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}})\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

`e)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}(A))\Leftrightarrow(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}(A))$.

`f)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta,\alpha\cap\beta\in\mathcal{P}(A))\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{P}(A))$.

`g)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{U})\Leftrightarrow(\alpha\cup\beta\in\mathcal{U})$.

`h)` $\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta,\alpha\cap\beta\in\mathcal{U})\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{U})$.

Beweis **347-15** `a)`

`Thema0.1` $\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

Aus `Thema0.1`“$\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$”
folgt via **32-5**: $\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

Ergo `Thema0.1`: `A1` “$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))\Rightarrow(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$”

`Thema0.2` $\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

Aus `Thema0.2`“$\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$”
folgt via **347-5**: $\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

Ergo `Thema0.2`: `A2` “$\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$”

`1:` Aus `A1` gleich “$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))\Rightarrow(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$” und
aus `A2` gleich “$\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$”
folgt: $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))\Leftrightarrow(\alpha\cup\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

<u>Beweis **347-15**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.
Aus `Thema0`"$\alpha \cup \beta \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`:	$\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})),$$

`2:` Aus `1` und
aus **32-7**"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})).$$

`2:` Aus `1` und
aus **32-7**"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

Beweis **347-15** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$	$\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)$.
Aus `Thema0.1` "$\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)$"	
folgt via **2-27**:	$\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A)$.

Ergo `Thema0.1`: `A1` "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A))$"

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$	$\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A)$.
Aus `Thema0.2` "$\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A)$"	
folgt via **341-2**:	$\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)$.

Ergo `Thema0.2`: `A2` "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A))$"

`1:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A))$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A))$.

`f)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}(A)$.
Aus `Thema0` "$\alpha \cup \beta \ldots \in \mathcal{P}(A)$"	
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:	$\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A))$.

`g)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(\mathcal{U})) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(\mathcal{U}))$.

`2:` Aus `1` und
aus **0-28** "$\mathcal{P}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{U}) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{U})$.

<u>Beweis **347-15**</u> `h)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt:

$$\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta,\alpha\cap\beta\in\mathcal{P}(\mathcal{U}))\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{P}(\mathcal{U})).$$

`2:` Aus `1` und
aus **0-28**"$\mathcal{P}(\mathcal{U})=\mathcal{U}$"
folgt: $\forall\alpha,\beta:(\alpha\cup\beta,\alpha\cap\beta\in\mathcal{U})\Rightarrow(\alpha,\beta\in\mathcal{U}).$

$\square$

347-16 $\square$_Gewichte ϕ auf speziellen Definitions-Bereichen $\mathsf{dom}\,\phi$ haben gelegentlich erstaunliche Eigenschaften. Teil 1.

347-16(Satz)

a) *Aus* "ϕ *ist* $\square$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
und "$E \cap D = 0$"
folgt "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)$"
und "$\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)$".

b) *Aus* "ϕ *ist* $\square$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
und "$E \cap D = 0$"
folgt "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)$"
und "$\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)$".

c) *Aus* "ϕ *ist* $\square$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A)$"
und "$E \cap D = 0$"
folgt "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)$"
und "$\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)$".

d) *Aus* "ϕ *ist* $\square$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U}$"
und "$E \cap D = 0$"
folgt "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)$"
und "$\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **347-16** `a)`
`VS` gleich $(\phi \text{ ist } \square\_\text{Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cap D = 0$"
folgt via **347-12**:

$$(\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)) \wedge (\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)).$$

<u>Beweis **347-16**</u> `b)` `VS` gleich (ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}})$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus 2"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cap D = 0$"
folgt via **347-12**:
$$(\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)) \wedge (\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)).$$

`c)` `VS` gleich (ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A)) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(A))$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A) \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus 2"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cap D = 0$"
folgt via **347-12**:
$$(\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)) \wedge (\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)).$$

`d)` `VS` gleich (ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U}) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{U}) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U} \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus 2"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Leftrightarrow (\alpha \cup \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cap D = 0$"
folgt via **347-12**:
$$(\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\square\_\phi(D)) \wedge (\phi(E)\_\square\_\phi(D) = \phi(D)\_\square\_\phi(E)).$$

$\square$

347-17 $\Box$_Gewichte ϕ auf speziellen Definitions-Bereichen $\mathsf{dom}\,\phi$ haben gelegentlich erstaunliche Eigenschaften, Teil 2.

347-17(Satz)

a) *Aus "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"*
folgt "$\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

b) *Aus "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$" und "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"*
folgt "$\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

c) *Aus "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A)$" und "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"*
folgt "$\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

d) *Aus "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U}$" und "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"*
folgt "$\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **347-17** a) `VS` gleich (ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$) $\wedge$($\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$).

1: Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ Mengenring.

2: Aus `VS` gleich "… $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 1
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring.

3: Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$ …",
aus 2 "$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring" und
aus `VS` gleich "… x assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt via **347-13**: $\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$.

<u>Beweis **347-17**</u> `b)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}})$
$\wedge(\Box \text{ assoziativ auf } \mathsf{ran}\,\phi)$.

`1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Mengenring.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `1`
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2`"$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt via **347-13**: $\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$.

`c)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A))$
$\wedge(\Box \text{ assoziativ auf } \mathsf{ran}\,\phi)$.

`1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}(A)$ Mengenring.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A)$" und
aus `1`
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2`"$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt via **347-13**: $\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$.

`d)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U})$
$\wedge(\Box \text{ assoziativ auf } \mathsf{ran}\,\phi)$.

`1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{U}$ Mengenring.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U}$" und
aus `1`
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2`"$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt via **347-13**: $\phi(E)\_\Box\_\phi(D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$.

$\Box$

347-18 $\Box$_Gewichte ϕ auf speziellen Definitions-Bereichen $\mathsf{dom}\,\phi$ haben gelegentlich erstaunliche Eigenschaften, Teil 3.

347-18(Satz)

a) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
und "$\Box$ *assoziativ auf* $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

b) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
und "$\Box$ *assoziativ auf* $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

c) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A)$"
und "$\Box$ *assoziativ auf* $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

d) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U}$"
und "$\Box$ *assoziativ auf* $\mathsf{ran}\,\phi$"
folgt "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$"
und "$\phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E)$".

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **347-18**</u> `a)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(A))$
$\wedge(\Box \text{ assoziativ auf } \mathsf{ran}\,\phi)$.

`1.1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$ Mengenring.

`1.2:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A))$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Menenring.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box_$Gewichta auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring",
aus `VS` gleich "$\ldots x$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$" und
aus `2.2`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt via **347-14**:

$$\begin{aligned} & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge\quad & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E) \\ \wedge\quad & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge\quad & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E). \end{aligned}$$

<u>Beweis **347-18**</u> `b)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (\Box \text{ assoziativ auf } \mathsf{ran}\,\phi)$.

`1.1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Mengenring.

`1.2:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}} \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Menenring.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}_{\text{endl}} \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewichta auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring",
aus `VS` gleich "$\ldots x$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$" und
aus `2.2`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt via **347-14**:

$$\begin{aligned} & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge\quad & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E) \\ \wedge\quad & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge\quad & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E). \end{aligned}$$

<u>Beweis **347-18**</u> `c)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A))$
$\wedge(\Box \text{ assoziativ auf } \mathsf{ran}\,\phi)$.

`1.1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}(A)$ Mengenring.

`1.2:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A))$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A) \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Menenring.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{P}(A) \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box_$Gewichta auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring",
aus `VS` gleich "$\ldots x$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$" und
aus `2.2`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt via **347-14**:

$$\begin{array}{rl} & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E) \\ \wedge & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E). \end{array}$$

Beweis **347-18** `d)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U}) \wedge (\Box \text{ assoziativ auf } \mathsf{ran}\,\phi)$.

`1.1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{U}$ Mengenring.

`1.2:` Via **347-15** gilt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathcal{U})$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U} \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\phi$ Menenring.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = \mathcal{U} \ldots$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewichta auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$",
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\,\phi$ Mengenring",
aus `VS` gleich "$\ldots x$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,\phi$" und
aus `2.2`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathsf{dom}\,\phi) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt via **347-14**:

$$\begin{aligned} & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge \quad & \phi(E \cup D)\_\Box\_\phi(E \cap D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E) \\ \wedge \quad & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D) \\ \wedge \quad & \phi(E \cap D)\_\Box\_\phi(E \cup D) = \phi(D)\_\Box\_\phi(E). \end{aligned}$$

$\Box$

347-19. Nun sollen **347-17,18** im Kontext von **347-9** eingesetzt werden.

347-19(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

Dann folgt:

a) $(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(D)=(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(D)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)$.

b) $(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cup D)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cap D)=(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(D)$.

c) $(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cup D)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cap D)=(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(D)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)$.

d) $(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cap D)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cup D)=(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(D)$.

e) $(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cap D)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E\cup D)=(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(D)\_\Box\_(o,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(E)$.

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **347-19**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "A Menge",
aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ tunnelt rechts auf A" und
aus $\rightarrow\!)$ "o ist $\square$neutral auf A"
folgt via **347-2**: $\mathsf{dom}\,(o,\overset{\mathsf{fin}}{\square}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "A Menge",
aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ tunnelt rechts auf A" und
aus $\rightarrow\!)$ "o ist $\square$neutral auf A"
folgt via **347-9**: $o,\overset{\mathsf{fin}}{\square}$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

`1.3:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "o ist $\square$neutral auf A" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ tunnelt rechts auf A"
folgt via **347-4**: $\square$ assoziativ auf A.

`2.1:` Aus `1.2` und
aus `1.1`
folgt: $o,\overset{\mathsf{fin}}{\square}$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(o,\overset{\mathsf{fin}}{\square})$.

`2.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "A Menge",
aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ tunnelt rechts auf A" und
aus $\rightarrow\!)$ "o ist $\square$neutral auf A"
folgt via **347-2**: $\mathsf{ran}\,(o,\overset{\mathsf{fin}}{\square}) \subseteq A$.

`3:` Aus `1.3`"$\square$ assoziativ auf A" und
aus `2.2`"$\mathsf{ran}\,(o,\overset{\mathsf{fin}}{\square}) \subseteq A$"
folgt via **211-2**: $\square$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,(o,\overset{\mathsf{fin}}{\square})$.

...

<u>Beweis</u> **347-19** ...

4.a): Aus 2.1 "$\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 3 "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$"
folgt via **347-17**: $(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(D) = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(D)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E).$

4.b): Aus 2.1 "$\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 3 "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$"
folgt via **347-18**:

$$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cup D)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cap D) = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(D).$$

4.c): Aus 2.1 "$\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 3 "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$"
folgt via **347-18**:

$$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cup D)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cap D) = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(D)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E).$$

4.d): Aus 2.1 "$\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 3 "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$"
folgt via **347-18**:

$$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cap D)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cup D) = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(D).$$

4.e): Aus 2.1 "$\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$",
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus 3 "$\Box$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})$"
folgt via **347-18**:

$$(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cap D)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E\cup D) = (\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(D)\_\Box\_(\overset{\mathsf{fin}}{o,\Box})(E).$$

$\Box$

Arithmetik: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$. $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}$. $\mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}$.

Ersterstellung: 25/06/15 **Letzte Änderung: 14/12/15**

348-1. Mit $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ und $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}$ stehen nun Funktionen zur Verfügung, die jeder Klasse eine "Summe", ein (x-abhängiges) "Produkt" zuordnen. Diese Zuordnungen sind klarer Weise für endliche Teilmengen von $\mathbb{A}$ von besonderem Interesse. Da für M kein allgemeines AssoziativitätsGesetz zur Verfügung steht, ist die Vorgehensweise bei der Multiplikation aufwändiger als bei der Addition. Insbesondere werden Klassen x betrachtet, auf denen "$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$" uneingeschränkt gültig ist. Hier werden $x = \mathbb{C}$ oder $x = \mathbb{T}$ genauer betrachtet

348-1(Definition)

1) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0, \mathsf{A}}$.

2) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{1, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$.

348-2. Die Addition ist auf $\mathbb{A}$ assoziativ. Die Multiplikation ist auf $\mathbb{T}, \mathbb{C}$ assoziativ. 0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$. 1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$.

348-2(Satz)

a) A *assoziativ auf* $\mathbb{A}$.

b) A *tunnelt rechts auf* $\mathbb{A}$.

c) M *assoziativ auf* $\mathbb{T}$.

d) M *assoziativ auf* $\mathbb{C}$.

e) M *tunnelt rechts auf* $\mathbb{T}$.

f) M *tunnelt rechts auf* $\mathbb{C}$.

g) 0 *ist* A*neutral auf* $\mathbb{A}$.

h) 1 *ist* M*neutral auf* $\mathbb{A}$.

i) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$.

j) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **348-2** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{A}$.

Via **FSA** gilt: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma)$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: A assoziativ auf $\mathbb{A}$.

<u>Beweis **348-2**</u> `b)`

Aus **248-1**“A kommutativ auf $\mathbb{A}$” und
aus `a)`“A assoziativ auf $\mathbb{A}$”
folgt via **344-15**: A tunnelt rechts auf A.

`c)`

> $\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{T}$.
> Aus `Thema0`“$\alpha \ldots \in \mathbb{T}$” und
> aus `Thema0`“$\ldots \gamma \in \mathbb{T}$”
> folgt via **AGM**$\mathbb{T}$: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: M assoziativ auf $\mathbb{T}$.

`d)`

> $\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.
> Aus `Thema0`“$\alpha \ldots \in \mathbb{C}$” und
> aus `Thema0`“$\ldots \gamma \in \mathbb{C}$”
> folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: M assoziativ auf $\mathbb{C}$.

`e)`

`1:` Aus **248-1**“M kommutativ auf $\mathbb{A}$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **210-2**: M kommutativ auf $\mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`“M kommutativ auf $\mathbb{T}$” und
aus `c)`“M assoziativ auf $\mathbb{T}$”
folgt via **344-15**: M tunnelt rechts auf $\mathbb{T}$.

`f)`

`1:` Aus **248-1**“M kommutativ auf $\mathbb{A}$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **210-2**: M kommutativ auf $\mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`“M kommutativ auf $\mathbb{C}$” und
aus `d)`“M assoziativ auf $\mathbb{C}$”
folgt via **344-15**: M tunnelt rechts auf $\mathbb{C}$.

<u>Beweis **348-2**</u> `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{A}$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathbb{A}$” folgt via **folk**:	α Zahl.
`3:` Aus `2`“α Zahl” folgt via **FSA**0:	$\alpha = \alpha + 0 = 0 + \alpha$.
`4:` Aus `3` folgt:	$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

Ergo `Thema1`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha)$”

`1.2:` Via $\in$**schola** gilt: 0 Zahl.

`2:` Aus `1.2`“0 Zahl”
folgt via **folk**: $0 \in \mathbb{A}$

`3:` Aus `2`“$0 \in \mathbb{A}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha)$”
folgt via **208-1(Def)**: 0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$.

Beweis **348-2** `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{A}$.
`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathbb{A}$" folgt via **folk**:	α Zahl.
`3:` Aus `2`"α Zahl" folgt via **FSM**1:	$\alpha = \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha$.
`4:` Aus `3` folgt:	$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

Ergo `Thema1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha)\text{”}}$

`1.2:` Via $\in$**schola** gilt: 1 Zahl.

`2:` Aus `1.2`"1 Zahl"
folgt via **folk**: $1 \in \mathbb{A}$

`3:` Aus `2`"$1 \in \mathbb{A}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha)$"
folgt via **208-1(Def)**: 1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$.

`i)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{T}$.
Aus `Thema0`"$\alpha, \beta \in \mathbb{T}$" folgt via $\cdot$**SZ**:	$\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T}$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$.

`j)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
Aus `Thema0`"$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$" folgt via $\cdot$**SZ**:	$\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C}$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$.

$\square$

348-3. $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ hat ansprechende Eigenschaften.

348-3(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

b) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) \subseteq \mathbb{A}$.

c) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ *Relation.*

d) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ *Funktion.*

e) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$.

f) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

g) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(0) = 0$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \textit{ Zahl}) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \alpha)$.

i) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \textit{ Zahl}) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha + \beta)$.

j) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \textit{ Zahl}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})))$
$\Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) + \alpha)$.

k) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(E \cup D) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(E \cap D) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(E) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(D)$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **348-3**</u>

1.1: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2**“A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**: $\mathsf{dom}\,(0,\overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

1.2: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2**“A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**: $\mathsf{ran}\,(0,\overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}}) \subseteq \mathbb{A}$.

1.3: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2**“A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**: $0,\overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}}$ Relation.

1.4: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2**“A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**: $0,\overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}}$ Funktion.

1.5: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2**“A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**: $0,\overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$.

1.6: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2**“A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-9**: $0,\overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}}$ ist A_Gewicht auf $\mathbb{A}$.

1.7: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2**“A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**: $(0,\overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(0) = 0$.

...

<u>Beweis</u> **348-3** ...

`1.8:` Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2**"A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$" und
aus **348-2**"0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(\{\alpha\}) = \alpha).$

`1.9:` Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2**"A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$" und
aus **348-2**"0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-2**:

$$\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{A}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A}))) \Rightarrow ((0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(\{\alpha\} \cup \beta) = \alpha + (0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(\beta)).$$

`1.10:` Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2**"A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$" und
aus **348-2**"0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$
folgt via **347-19**:

$$(0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(E \cup D) + (0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(E \cap D) = (0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(E) + (0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(D).$$

`Thema2.1` β Zahl.
`4:` Aus `Thema2.1`"β Zahl" folgt via **folk**: $\beta \in \mathbb{A}$.
`5:` Aus `4` und aus `1.8` folgt: $(0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(\{\beta\}) = \beta.$

Ergo `Thema2.1`: $\forall\beta : (\beta\ \mathrm{Zahl}) \Rightarrow ((0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(\{\beta\}) = \beta).$

Konsequenz: `A1` "$\forall\alpha : (\alpha\ \mathrm{Zahl}) \Rightarrow ((0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(\{\alpha\}) = \alpha)$"

...

Beweis **348-3** ...

`Thema2.2` $(\alpha, \beta \text{ Zahl}) \wedge (\alpha \neq \beta)$.

4: Aus `Thema2.2`"α, β Zahl..."
folgt via **folk**: $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$.

5: Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2**"A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$",
aus 4"$\alpha, \beta \in \mathbb{A}$" und
aus `Thema2.2`"...$\alpha \neq \beta$"
folgt via **347-11**: $(0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\{\alpha, \beta\}) = \alpha + \beta$.

Ergo `Thema2.2`:

A2	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \text{ Zahl}) \wedge (\alpha \neg \beta)) \Rightarrow ((0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\{\alpha, \beta\}) = \alpha + \beta)$"

`Thema2.3` $(\gamma \text{ Zahl}) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A}))$.

4: Aus `Thema2.3`"γ Zahl..."
folgt via **folk**: $\gamma \in \mathbb{A}$.

5: Aus 4"$\gamma \in \mathbb{A}$",
aus `Thema2.3`"...$\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A})$" und
aus `1.9`
folgt: $(0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\{\gamma\} \cup \delta) = (0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\delta) + \gamma$.

Ergo `Thema2.3`:

$$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \text{ Zahl}) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A}))) \Rightarrow ((0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\{\gamma\} \cup \delta) = (0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\delta) + \gamma).$$

Konsequenz:

A3	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \text{ Zahl}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A})))$ $\Rightarrow ((0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\{\alpha\} \cup \beta) = (0, \overset{\text{fin}}{\mathsf{A}})(\beta) + \alpha)$"

...

<u>Beweis</u> **348-3** ...

3.a): Aus 1.1 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

3.b): Aus 1.2 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) \subseteq \mathbb{A}$.

3.c): Aus 1.3 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ Relation.

3.d): Aus 1.4 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ Funktion.

3.e): Aus 1.5 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$.

3.f): Aus 1.6 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

3.g): Aus 1.7 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(0) = 0$.

3.h): Aus A1 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \text{ Zahl}) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \alpha)$.

3.i): Aus A2 und
aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}}$"
folgt:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \text{ Zahl}) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha + \beta).$$

...

Beweis **348-3** ...

`3.j):` Aus `A3` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0, \mathsf{A}}$"
folgt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \text{ Zahl}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A}))) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\} \cup \beta) = (\overset{\mathsf{fin}}{0, \mathsf{A}})(\beta) + \alpha).$$

`3.k):` Aus `1.10` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = \overset{\mathsf{fin}}{0, \mathsf{A}}$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(E \cup D) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(E \cap D) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(E) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(D).$

□

348-4. Erfrischende Algebra erfreut die Betrachter.

348-4(Satz) *Es gelte:*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-\square_-\beta\in Q)$.

Dann folgt:

a) $Q\subseteq A$.

b) $(\square\restriction Q\times Q)$ *Algebra in* Q.

c) $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-(\square\restriction Q\times Q)_-\beta=\alpha_-\square_-\beta)$.

d) $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-(\square\restriction Q\times Q)_-\beta\in Q)$.

e) $\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in Q)$
$$\Rightarrow\qquad \alpha_-(\square\restriction Q\times Q)_-(\beta_-(\square\restriction Q\times Q)_-\gamma)=\alpha_-\square_-(\beta_-\square_-\gamma).$$

f) $\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in Q)$
$$\Rightarrow\qquad (\alpha_-(\square\restriction Q\times Q)_-\beta)_-(\square\restriction Q\times Q)_-\gamma=(\alpha_-\square_-\beta)_-\square_-\gamma.$$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **348-4**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\gamma \in Q$.

`1:` Aus `Thema0`"$\gamma \in Q$",
aus `Thema0`"$\gamma \in Q$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\square{}_\beta \in Q)$"
folgt: $\gamma{}_\square{}_\gamma \in Q$.

`2:` Aus `1`"$\gamma{}_\square{}_\gamma \in Q$"
folgt via **ElementAxiom**: $\gamma{}_\square{}_\gamma$ Menge.

`3:` Aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus `2`"$\gamma{}_\square{}_\gamma$ Menge"
folgt via **93-12**: $\gamma \in A$.

Ergo `Thema0`: $\forall \gamma : (\gamma \in Q) \Rightarrow (\gamma \in A)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $Q \subseteq A$.

`b)`

`1.1:` Aus →) "$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \square = A \times A) \wedge (\mathsf{ran}\, \square \subseteq A)$.

`1.2:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\, (\square \restriction Q \times Q) = (Q \times Q) \cap \mathsf{dom}\, \square$.

`1.3:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{ran}\, (\square \restriction Q \times Q) = \square[Q \times Q]$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\square$ Funktion…"
folgt via **258-11**: $(\square \restriction Q \times Q)$ Funktion.

`2.2:` Aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\square{}_\beta \in Q)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $Q \subseteq A$.

…

Beweis **348-4** `b)` ...

`Thema2.3` $\gamma \in \Box[Q \times Q]$.

`3:` Aus `1.1`"$\Box$ Funktion ... " und
aus `Thema2.3`"$\gamma \in \Box[Q \times Q]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in Q \times Q) \wedge (\gamma = \Box(\Omega))$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in Q \times Q \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi \in Q) \wedge (\Psi \in Q) \wedge (\Omega = (\Phi, \Psi))$.

`5.1:` Aus `3`"$\ldots \gamma = \Box(\Omega)$" und
aus `4`"$\ldots \Omega = (\Phi, \Psi)$"
folgt: $\gamma = \Box((\Phi, \Psi))$.

`5.2:` Aus `4`"$\ldots \Phi \in Q \ldots$",
aus `4`"$\ldots \Psi \in Q \ldots$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$"
folgt: $\Phi\_\Box\_\Psi \in Q$.

`6:` Aus `5.1`
folgt: $\gamma = \Phi\_\Box\_\Psi$.

`7:` Aus `6` und
aus `5.2`
folgt: $\gamma \in Q$.

Ergo `Thema2.3`: $\forall \gamma : (\gamma \in \Box[Q \times Q]) \Rightarrow (\gamma \in Q)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\Box[Q \times Q] \subseteq Q$"

...

Beweis **348-4** `b)` ...

`3.1:` Aus `2.2`“$Q \subseteq A$”
folgt via **6-7**: $Q \times Q \subseteq A \times A.$

`3.2:` Aus `1.3` und
aus `A1`
folgt: $\mathsf{ran}\ (\Box \downharpoonleft Q \times Q) \subseteq Q.$

`4:` Aus `3.1`“$Q \times Q \subseteq A \times A$”
folgt via **folk**: $(Q \times Q) \cap (A \times A) = Q \times Q.$

`5:` Aus `4` und
aus `1.1`“$\ldots \mathsf{dom}\, \Box = A \times A \ldots$”
folgt: $(Q \times Q) \cap \mathsf{dom}\, \Box = Q \times Q.$

`6:` Aus `1.2` und
aus `5`
folgt: $\mathsf{dom}\ (\Box \downharpoonleft Q \times Q) = Q \times Q.$

`7:` Aus `2.1`“$(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$ Funktion”,
aus `6`“$\mathsf{dom}\ (\Box \downharpoonleft Q \times Q) = Q \times Q$” und
aus `3.2`“$\mathsf{ran}\ (\Box \downharpoonleft Q \times Q) \subseteq Q$”
folgt via **93-6**: $(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q.

Beweis **348-4** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\gamma, \delta \in Q.$

`1:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” und
aus →) “ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_\square\beta \in Q)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(\square \restriction Q \times Q) \text{ Algebra in } Q.$$

`2:` Aus `1` “ $(\square \restriction Q \times Q)$ Algebra in Q ”
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\ (\square \restriction Q \times Q) = Q \times Q.$

`3:` Aus `Thema0` “ $\gamma \ldots \in Q$ ” und
aus `Thema0` “ $\ldots \delta \in Q$ ”
folgt via **folk**: $(\gamma, \delta) \in Q \times Q.$

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $(\gamma, \delta) \in \mathsf{dom}\ (\square \restriction Q \times Q).$

`5:` Aus `4` “ $(\gamma, \delta) \in \mathsf{dom}\ (\square \restriction Q \times Q)$ ”
folgt via **258-11**: $(\square \restriction Q \times Q)\,((\gamma, \delta)) = \square((\gamma, \delta)).$

`6:` Aus `5`
folgt: $\gamma_{\_}(\square \restriction Q \times Q)_{\_}\delta = \gamma_\square\delta.$

Ergo `Thema0`: $\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in Q) \Rightarrow (\gamma_{\_}(\square \restriction Q \times Q)_{\_}\delta = \gamma_\square\delta).$

Konsequenz: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_{\_}(\square \restriction Q \times Q)_{\_}\beta = \alpha_\square\beta).$

$\square$

`d)`

`1:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” und
aus →) “ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_\square\beta \in Q)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(\square \restriction Q \times Q) \text{ Algebra in } Q.$$

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\alpha, \beta \in Q.$

Aus `1` “ $(\square \restriction Q \times Q)$ Algebra in Q ” und
aus `Thema1` “ $\alpha, \beta \in Q$ ”
folgt via **93-12**: $\alpha_{\_}(\square \restriction Q \times Q)_{\_}\beta \in Q.$

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_{\_}(\square \restriction Q \times Q)_{\_}\beta \in Q).$

<u>Beweis **348-4**</u> `e)`

`1.1:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A" und
aus →) "$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\beta \in Q)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\beta = \alpha{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\beta).$$

`1.2:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A" und
aus →) "$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\beta \in Q)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\beta \in Q)..$$

`Thema2` $\phi,\delta,\epsilon \in Q.$

`3.1:` Aus `Thema2`"$\ldots\delta,\epsilon \in Q$" und
aus `1.1`
folgt: $\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon = \delta{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\epsilon.$

`3.2:` Aus `Thema2`"$\ldots\delta,\epsilon \in Q$" und
aus `1.2`
folgt: $\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon \in Q.$

`4:` Aus `Thema2`"$\phi\ldots \in Q$",
aus `3.2`"$\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon \in Q$" und
aus `1.1`
folgt:
$$\phi{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner(\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon) = \phi{}_\llcorner\Box{}_\llcorner(\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon).$$

`5:` $\phi{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner(\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon)$
$$\stackrel{4}{=} \phi{}_\llcorner\Box{}_\llcorner(\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon) \stackrel{3.1}{=} \phi{}_\llcorner\Box{}_\llcorner(\delta{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\epsilon).$$

`6:` Aus `5`
folgt: $\phi{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner(\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon) = \phi{}_\llcorner\Box{}_\llcorner(\delta{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\epsilon).$

Ergo `Thema2`:
$$\forall\phi,\delta,\epsilon : (\phi,\delta,\epsilon \in Q) \Rightarrow \phi{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner(\delta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\epsilon) = \phi{}_\llcorner\Box{}_\llcorner(\delta{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\epsilon).$$

Konsequenz:
$$\forall\alpha,\beta,\gamma : (\alpha,\beta,\gamma \in Q) \Rightarrow \alpha{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner(\beta{}_\llcorner(\Box \restriction Q \times Q){}_\llcorner\gamma) = \alpha{}_\llcorner\Box{}_\llcorner(\beta{}_\llcorner\Box{}_\llcorner\gamma).$$

<u>Beweis **348-4** `f)`</u>

`1.1:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A” und
aus →) “$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta\in Q)$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:

$$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\beta=\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta).$$

`1.2:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A” und
aus →) “$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta\in Q)$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:

$$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\beta\in Q)..$$

`Thema2` $\phi,\delta,\epsilon\in Q.$

`3.1:` Aus `Thema2`“$\phi,\delta\ldots\in Q$” und
aus `1.1`
folgt: $\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta=\phi{}_{-}\Box{}_{-}\delta.$

`3.2:` Aus `Thema2`“$\phi,\delta,\ldots\in Q$” und
aus `1.2`
folgt: $\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta\in Q.$

`4:` Aus `3.2`“$\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta\in Q$”,
aus `Thema2`“$\ldots\epsilon\in Q$” und
aus `1.1`
folgt: $(\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta){}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\epsilon$
$=(\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta){}_{-}\Box{}_{-}\epsilon.$

`5:` $(\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta){}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\epsilon$
$\stackrel{4}{=}(\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta){}_{-}\Box{}_{-}\epsilon)\stackrel{3.1}{=}(\phi{}_{-}\Box{}_{-}\delta){}_{-}\Box{}_{-}\epsilon.$

`6:` Aus `5`
folgt: $(\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta){}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\epsilon=(\phi{}_{-}\Box{}_{-}\delta){}_{-}\Box{}_{-}\epsilon.$

Ergo `Thema2`: $\forall\phi,\delta,\epsilon:(\phi,\delta,\epsilon\in Q)$

$$\Rightarrow\quad(\phi{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\delta){}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\epsilon=(\phi{}_{-}\Box{}_{-}\delta){}_{-}\Box{}_{-}\epsilon.$$

Konsequenz: $\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in Q)$

$$\Rightarrow\quad(\alpha{}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\beta){}_{-}(\Box\restriction Q\times Q){}_{-}\gamma=(\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta){}_{-}\Box{}_{-}\gamma.$$

$\Box$

348-5. Nun soll **348-4** angewendet werden.

348-5(Satz) *Aus ...*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \square \_ \beta \in Q)$.

a) ... *und* "o *ist* $\square$*neutral auf* Q"
folgt "o *ist* $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$*neutral auf* Q".

b) ... *und* "o *ist* $\square$*neutral auf* A" *und* "$o \in Q$"
folgt "o *ist* $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$*neutral auf* Q".

c) ... *und* "$\square$ *kommutativ auf* Q"
folgt "$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ *kommutativ auf* Q".

d) ... *und* "$\square$ *kommutativ auf* A"
folgt "$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ *kommutativ auf* Q".

e) ... *und* "$\square$ *assoziativ auf* Q"
folgt "$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ *assoziativ auf* Q".

f) ... *und* "$\square$ *assoziativ auf* A"
folgt "$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ *assoziativ auf* Q".

g) ... *und* "$\square$ *tunnelt rechts auf* Q"
folgt "$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ *tunnelt rechts auf* Q".

h) ... *und* "$\square$ *tunnelt rechts auf* A"
folgt "$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ *tunnelt rechts auf* Q".

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **348-5**</u> `a)`

`VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\beta \in Q))$
$\wedge(o \text{ ist } \square\text{neutral auf } Q)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\beta \in Q)) \ldots$"
folgt via **348-4**: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_\beta = \alpha\_\square\_\beta)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots o$ ist $\square$neutral auf Q"
folgt via **208-1(Def)**: $o \in Q$.

`Thema2` $\gamma \in Q$.

`3.1:` Aus `Thema2`"$\gamma \in Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o$ ist $\square$ neutral auf Q"
folgt via **208-1(Def)**: $\gamma\_\square\_o = o\_\square\_\gamma = \gamma$.

`3.2:` Aus `Thema2`"$\gamma \in Q$",
aus `1.2`"$o \in Q$" und
aus `1.1`
folgt: $\gamma\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_o = \gamma\_\square\_o$.

`3.3:` Aus `1.2`"$o \in Q$",
aus `Thema2`"$\gamma \in Q$" und
aus `1.1`
folgt: $o\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_\gamma = o\_\square\_\gamma$.

`4:` Aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $\gamma\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_o = o\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_\gamma = \gamma$.

Ergo `Thema2`:

`A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in Q) \Rightarrow (\gamma\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_o = o\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_\gamma = \gamma)$"

`3:` Aus `1.2`"$o \in Q$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in Q)$
$\Rightarrow (\gamma\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_o = o\_(\square \downharpoonleft Q \times Q)\_\gamma = \gamma)$"
folgt via **208-1**: o ist $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q.

<u>Beweis **348-5**</u> `b)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta \in Q))$
$\wedge(o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } A) \wedge (o \in Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta \in Q) \ldots$"
folgt via **348-4**: $Q \subseteq A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (o \text{ ist } \Box\_\text{neutral auf } A) \wedge (o \in Q)$" und
aus `1`"$Q \subseteq A$"
folgt via **208-4**: o ist $\Box$neutral auf Q.

`3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta \in Q) \ldots$" und
aus `2`"o ist $\Box$neutral auf Q"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: o ist $(\Box \restriction Q \times Q)$neutral auf Q.

`c)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta \in Q))$
$\wedge(\Box \text{ kommutativ auf } Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta \in Q)) \ldots$"
folgt via **348-4**: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\beta = \alpha{}_\_\Box{}_\_\beta)$.

| `Thema2` | $\gamma, \delta \in Q$. |

`3.1:` Aus `Thema2`"$\gamma, \delta \in Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ kommutativ auf Q"
folgt via **210-1(Def)**: $\gamma{}_\_\Box{}_\_\delta = \delta{}_\_\Box{}_\_\gamma$.

`3.2:` Aus `Thema2`"$\gamma, \delta \in Q$" und
aus `1`
folgt: $\gamma{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta = \gamma{}_\_\Box{}_\_\delta$.

`3.3:` Aus `Thema2`"$\ldots \delta \in Q$",
aus `Thema2`"$\gamma \ldots \in Q$" und
aus `1`
folgt: $\delta{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\gamma = \delta{}_\_\Box{}_\_\gamma$.

`4:` $\gamma{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta \stackrel{3.2}{=} \gamma{}_\_\Box{}_\_\delta \stackrel{3.1}{=} \delta{}_\_\Box{}_\_\gamma \stackrel{3.3}{=} \delta{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\gamma$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\gamma{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta = \delta{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\gamma$.

Ergo `Thema2`: $\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in Q) \Rightarrow (\gamma{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta = \delta{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\gamma)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: $(\Box \restriction Q \times Q)$ kommutativ auf Q.

<u>Beweis **348-5**</u> `d)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta \in Q))$
$\wedge(\Box \text{ kommutativ auf } A)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\Box$ Algebra in $A \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta \in Q) \ldots$”
folgt via **348-4**: $Q \subseteq A$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots \Box$ kommutativ auf A” und
aus `1`“$Q \subseteq A$”
folgt via **210-2**: $\Box$ kommutativ auf Q.

`3:` Aus `VS` gleich “$\Box$ Algebra in $A \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta \in Q) \ldots$” und
aus `2`“$\Box$ kommutativ auf Q”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\Box \restriction Q \times Q)$ kommutativ auf Q.

Beweis **348-5** `e)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q))$
$\wedge(\Box \text{ assoziativ auf } Q)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)) \ldots$”
folgt via **348-4**:
$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q)$
$\Rightarrow (\alpha\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_(\beta\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\gamma) = \alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)) \ldots$”
folgt via **348-4**:
$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q)$
$\Rightarrow ((\alpha\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\beta)\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma)$.

`Thema2` $\phi, \delta, \epsilon \in Q$.

`3.1:` Aus `Thema2`“$\phi, \delta, \epsilon \in Q$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \Box$ assoziativ auf Q”
folgt via **211-1(Def)**: $\phi\_\Box\_(\delta\_\Box\_\epsilon) = (\phi\_\Box\_\delta)\_\Box\_\epsilon$.

`3.2:` Aus `Thema2`“$\phi, \delta, \epsilon \in Q$” und
aus `1.1`
folgt: $\phi\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_(\delta\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\epsilon) = \phi\_\Box\_(\delta\_\Box\_\epsilon)$.

`3.3:` Aus `Thema2`“$\phi, \delta, \epsilon \in Q$” und
aus `1.2`
folgt: $(\phi\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\delta)\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\epsilon = (\phi\_\Box\_\delta)\_\Box\_\epsilon$.

`4:` Aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $\phi\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_(\delta\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\epsilon)$
$= (\phi\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\delta)\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\epsilon$.

Ergo `Thema2`:
$\forall \phi, \delta, \epsilon : (\phi, \delta, \epsilon \in Q) \Rightarrow \phi\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_(\delta\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\epsilon)$
$= (\phi\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\delta)\_(\Box \downharpoonright Q \times Q)\_\epsilon$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: $(\Box \downharpoonright Q \times Q)$ assoziativ auf Q.

<u>Beweis **348-5** `f)`</u>

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q))$
$\wedge(\Box \text{ assoziativ auf } A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q) \ldots$"
folgt via **348-4**: $Q \subseteq A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ assoziativ auf A" und
aus `1`"$Q \subseteq A$"
folgt via **211-2**: $\Box$ assoziativ auf Q.

`3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q) \ldots$" und
aus `2`"$\Box$ assoziativ auf Q"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(\Box \restriction Q \times Q)$ assoziativ auf Q.

<u>Beweis **348-5**</u> g)

VS gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta \in Q))$
$\wedge(\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q)$.

1: Aus VS gleich "$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta \in Q)) \ldots$"
folgt via **348-4**:
$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q)$
$\Rightarrow ((\alpha{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\beta){}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\gamma = (\alpha{}_\_\Box{}_\_\beta){}_\_\Box{}_\_\gamma)$.

> $\boxed{\text{Thema2}}$ $\phi, \delta, \epsilon \in Q$.
>
> 3.1: Aus Thema2"$\phi, \delta, \epsilon \in Q$" und
> aus VS gleich "$\ldots \Box$ tunnelt rechts auf Q"
> folgt via **344-1(Def)**: $(\phi{}_\_\Box{}_\_\delta){}_\_\Box{}_\_\epsilon = (\phi{}_\_\Box{}_\_\epsilon){}_\_\Box{}_\_\delta$.
>
> 3.2: Aus Thema2"$\phi, \delta, \epsilon \in Q$" und
> aus 1
> folgt: $(\phi{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta){}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\epsilon = (\phi{}_\_\Box{}_\_\delta){}_\_\Box{}_\_\epsilon$.
>
> 3.3: Aus Thema2"$\phi \ldots \in Q$",
> aus Thema2"$\ldots \epsilon \in Q$",
> aus Thema2"$\ldots \delta \ldots \in Q$" und
> aus 1
> folgt: $(\phi{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\epsilon){}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta = (\phi{}_\_\Box{}_\_\epsilon){}_\_\Box{}_\_\phi$.
>
> 4: Aus 3.1,
> aus 3.2 und
> aus 3.3
> folgt:
> $(\phi{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta){}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\epsilon$
> $= (\phi{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\epsilon){}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta$.

Ergo Thema2:
$\forall \phi, \delta, \epsilon : (\phi, \delta, \epsilon \in Q) \Rightarrow (\phi{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta){}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\epsilon$
$= (\phi{}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\epsilon){}_\_(\Box \restriction Q \times Q){}_\_\delta$.

Konsequenz via **344-1(Def)**: $(\Box \restriction Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q.

Beweis **348-5** `h)`

`VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\llcorner\square{}_\llcorner\beta \in Q))$
$\wedge(\square \text{ tunnelt rechts auf } A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(\square$ Algebra in $A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\llcorner\square{}_\llcorner\beta \in Q)) \ldots$"
folgt via **348-4**: $Q \subseteq A$.

> `Thema2` $\phi, \delta, \epsilon \in Q$.
>
> `3:` Aus `Thema2`"$\phi, \delta, \epsilon \in Q$" und
> aus `1`"$Q \subseteq A$"
> folgt via **0-4**: $\phi, \delta, \epsilon \in A$.
>
> `4:` Aus `3`"$\phi, \delta, \epsilon \in A$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots \square$ tunnelt rechts auf A"
> folgt via **344-1(Def)**: $(\phi{}_\llcorner\square{}_\llcorner\delta){}_\llcorner\square{}_\llcorner\epsilon = (\phi{}_\llcorner\square{}_\llcorner\epsilon){}_\llcorner\square{}_\llcorner\delta$.

Ergo `Thema2`:

$$\forall \phi, \delta, \epsilon : (\phi, \delta, \epsilon \in Q) \Rightarrow ((\phi{}_\llcorner\square{}_\llcorner\delta){}_\llcorner\square{}_\llcorner\epsilon = (\phi{}_\llcorner\square{}_\llcorner\epsilon){}_\llcorner\square{}_\llcorner\delta).$$

Konsequenz via **344-1(Def)** `A1` | "$\square$ tunnelt rechts auf Q"

`3:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_\llcorner\square{}_\llcorner\beta \in Q) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\square$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(\square \downharpoonright Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q.

$\square$

348-6. Ein weiterer Schritt zum Ausbau der Theorie von $\Box$_Gewichten.

<u>**348-6(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

→) ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathfrak{R}$.

→) $A, B \in \mathfrak{R}$.

→) $A \cap B = 0$.

Dann folgt "$\phi(A \cup B) = \phi(A)_{-}\Box_{-}\phi(B)$".

<u>ALG-**Notation**</u>.

<u>Beweis **348-6**</u>

1: Aus →) "$A, B \in \mathfrak{R}$" und
aus →) "$\mathfrak{R}$ Mengenring"
folgt via **346-6**: $A \cup B \in \mathfrak{R}$.

2: Aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus →) "$A, B \in \mathfrak{R}$",
aus 1 "$A \cup B \in \mathfrak{R}$" und
aus →) "$A \cap B = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(A \cup B) = \phi(A)_{-}\Box_{-}\phi(B)$.

$\Box$

348-7. Hier wird **348-6** auf die Mengenringe $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A), \mathcal{P}_{\text{endl}}, \mathcal{P}(A), \mathcal{U}$ spezialisiert.

348-7(Satz)

a) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$"
und "$E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$"
und "$E \cap D = 0$" *folgt* "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$".

b) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\text{endl}}$"
und "$E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
und "$E \cap D = 0$" *folgt* "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$".

c) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathcal{P}(A)$"
und "$E, D \in \mathcal{P}(A)$"
und "$E \cap D = 0$" *folgt* "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$".

d) *Aus* "ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathcal{U}$"
und "E, D *Menge*"
und "$E \cap D = 0$" *folgt* "$\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$".

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **348-7**</u> `a)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathcal{P}_{\text{endl}}(A))$
$\wedge(E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$ Mengenring.

`2:` Aus `1`“$\mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$ Mengenring”,
aus `VS` gleich “ϕ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots (E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)) \wedge (E \cap D = 0)$”
folgt via **348-6**: $\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$.

`b)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathcal{P}_{\text{endl}})$
$\wedge(E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Mengenring.

`2:` Aus `1`“$\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Mengenring”,
aus `VS` gleich “ϕ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots (E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \wedge (E \cap D = 0)$”
folgt via **348-6**: $\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$.

`c)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathcal{P}(A))$
$\wedge(E, D \in \mathcal{P}(A)) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}(A)$ Mengenring.

`2:` Aus `1`“$\mathcal{P}(A)$ Mengenring”,
aus `VS` gleich “ϕ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathcal{P}(A) \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots (E, D \in \mathcal{P}(A)) \wedge (E \cap D = 0)$”
folgt via **348-6**: $\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$.

`d)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathcal{U})$
$\wedge(E, D \text{ Menge}) \wedge (E \cap D = 0)$.

`1.1:` Via **346-5** gilt: $\mathcal{U}$ Mengenring.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots E, D$ Menge$\ldots$”
folgt via **folk**: $E, D \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“$\mathcal{U}$ Mengenring”,
aus `VS` gleich “ϕ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathcal{U} \ldots$”,
aus `1.2`“$E, D \in \mathcal{U}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots E \cap D = 0$”
folgt via **348-6**: $\phi(E \cup D) = \phi(E)\_\Box\_\phi(D)$.

$\Box$

348-8. Ein zu später Fortschritt ist besser als gar keiner.

348-8(Satz)

a) *Aus "$\Box$ tunnelt rechts auf Q" und "$P \subseteq Q$" folgt "$\Box$ tunnelt rechts auf P".*

b) *Aus "$\Box$ tunnelt links auf Q" und "$P \subseteq Q$" folgt "$\Box$ tunnelt links auf P".*

Beweis **348-8** a) VS gleich $(\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q) \wedge (P \subseteq Q)$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in P$.

1: Aus Thema0"$\alpha, \beta, \gamma \in P$" und
aus VS gleich "$\ldots P \subseteq Q$"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

2: Aus 1"$\alpha, \beta, \gamma \in Q$" und
aus VS gleich "$\Box$ tunnelt rechts auf $Q \ldots$"
folgt via **344-1(Def)**: $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in P) \Rightarrow ((\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta)$.

Konsequenz via **344-1(Def)**: $\Box$ tunnelt rechts auf P.

b) VS gleich $(\Box \text{ tunnelt links auf } Q) \wedge (P \subseteq Q)$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in P$.

1: Aus Thema0"$\alpha, \beta, \gamma \in P$" und
aus VS gleich "$\ldots P \subseteq Q$"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

2: Aus 1"$\alpha, \beta, \gamma \in Q$" und
aus VS gleich "$\Box$ tunnelt links auf $Q \ldots$"
folgt via **344-1(Def)**: $\alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma) = \beta\_\Box\_(\alpha\_\Box\_\gamma)$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in P) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma) = \beta\_\Box\_(\alpha\_\Box\_\gamma))$.

Konsequenz via **344-1(Def)**: $\Box$ tunnelt links auf P.

$\Box$

348-9. Die Mengenringe $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x), \mathcal{P}_{\text{endl}}, \mathcal{P}(x), \mathcal{U}$ sollten hin und wieder neu betrachtet werden.

348-9(Satz)

a) *Aus* "$E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" *folgt* "$E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$".

b) *Aus* "$E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}$" *folgt* "$E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}$".

c) *Aus* "$E \notin \mathcal{P}(x)$" *folgt* "$E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{P}(x)$".

d) *Aus* "$E \notin \mathcal{U}$" *folgt* "$E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{U}$".

Beweis **348-9** a) VS gleich $E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$..

1: Es gilt: $(E \cup D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \vee (E \cup D \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $E \cup D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

2: Via **folk** gilt: $E \subseteq E \cup D$.

3: Aus 2"$E \subseteq E \cup D$" und
aus 1.1.Fall"$E \cup D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-5**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

4: Nach VS gilt: $E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

A1 | "$E \cup D \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"

2: Via **KG**$\cup$ gilt: $D \cup E = E \cup D$.

3: Aus 2 und
aus A1
folgt: $\boxed{D \cup E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)}$

Beweis **348-9** `b)` `VS` gleich $E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`1:` Aus `VS` und
aus **32-7** "$\mathcal{P}_{\text{endl}} = \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U})$"
folgt: $E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U})$.

`2:` Aus `1` "$E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U})$.

`3:` Aus 2 und
aus **32-7** "$\mathcal{P}_{\text{endl}} = \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U})$"
folgt: $E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`c)` `VS` gleich $E \notin \mathcal{P}(x)$..

`1:` Es gilt: $(E \cup D \in \mathcal{P}(x)) \vee (E \cup D \notin \mathcal{P}(x))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \cup D \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Via **folk** gilt: $E \subseteq E \cup D$.

`3:` Aus 2 "$E \subseteq E \cup D$" und
aus `1.1.Fall` "$E \cup D \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-28**: $E \in \mathcal{P}(x)$.

`4:` Nach `VS` gilt: $E \notin \mathcal{P}(x)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$E \cup D \notin \mathcal{P}(x)$"

`2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $D \cup E = E \cup D$.

`3:` Aus 2 und
aus `A1`
folgt: $\boxed{D \cup E \notin \mathcal{P}(x)}$

<u>Beweis</u> **348-9** `d)` `VS` gleich $E \notin \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` und
aus **0-28**"$\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$"
folgt: $E \notin \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

`2:` Aus `1`"$E \notin \mathcal{P}(\mathcal{U})$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

`3:` Aus `2` und
aus **0-28**"$\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$"
folgt: $E \cup D, D \cup E \notin \mathcal{U}$.

□

348-10. Es hilft ja doch alles andere auch nicht weiter. Die Resultate **347-2,9,11,19** müsen "lokalisiert" werden. Die Beweis-Reihenfolge ist `abcde) - gh) - i) - jklm) - f)`.

348-10(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

→) $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta \in Q)$.

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* Q.

→) $o \in Q$ *Menge*.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

b) $\mathsf{ran}\,(\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}}) \subseteq Q$.

c) $\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}}$ *Relation*.

d) $\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}}$ *Funktion*.

e) $\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$.

f) $\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}}$ *ist* $\Box$*-Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

g) $(\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(0) = o$.

h) $\forall\alpha : (\alpha \in Q) \Rightarrow (\overbrace{o, (\Box \restriction Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\}) = \alpha)$.

...

`ALG`-**Notation**.

<u>348-10(Satz)</u> *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$.

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* Q.

→) $o \in Q$ *Menge.*

Dann folgt:

...

i) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\alpha)\_\,(\Box \downharpoonleft Q \times Q)\,\_\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\beta)$$
$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\alpha)\_\Box\_\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\beta).$$

j) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in Q) \wedge (\alpha \neq \beta))$

$$\Rightarrow \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}\,(\{\alpha, \beta\}) = \alpha\_\Box\_\beta).$$

k) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)))$

$$\Rightarrow ((\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\beta)\_\Box\_\alpha).$$

l) $\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(E)\_\Box\_\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(D)$

$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(D)\_\Box\_\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(E).$$

m) $\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(E \cup D)\_\Box\_\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(E \cap D)$

$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(E)\_\Box\_\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(D).$$

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **348-10**</u>

`1.1:` Aus →) “$\square$ Algebra in A” und
aus →) “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_\square_\beta \in Q)$”
folgt via **348-4**: $(\square \upharpoonright Q \times Q)$ Algebra in Q.

`1.2:` Aus →) “$\square$ Algebra in A”,
aus →) “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_\square_\beta \in Q)$” und
aus →) “$\square$ tunnelt rechts auf Q.”
folgt via **348-5**: $(\square \upharpoonright Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q.

`1.3:` Aus →) “$\square$ Algebra in A”,
aus →) “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_\square_\beta \in Q)$”,
aus →) “o ist $\square$neutral auf A” und
aus →) “$o \in Q \ldots$”
folgt via **348-5**: o ist $(\square \upharpoonright Q \times Q)$neutral auf Q.

`1.4:` Aus →) “$\square$ Algebra in A” und
aus →) “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_\square_\beta \in Q)$”
folgt via **348-4**: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_{\_}(\square \upharpoonright Q \times Q)_{\_}\beta) = \alpha_\square_\beta)$.

`2.a):` Aus `1.1` “$(\square \upharpoonright Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus →) “$\ldots Q$ Menge”,
aus `1.2` “$(\square \upharpoonright Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3` “o ist $(\square \upharpoonright Q \times Q)$neutral auf Q”
folgt via **347-2**: $\mathsf{dom}\,\overbrace{(o, (\square \upharpoonright Q \times Q))}^{\mathtt{fin}} = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

`2.b):` Aus `1.1` “$(\square \upharpoonright Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus →) “$\ldots Q$ Menge”,
aus `1.2` “$(\square \upharpoonright Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3` “o ist $(\square \upharpoonright Q \times Q)$neutral auf Q”
folgt via **347-2**: $\mathsf{ran}\,\overbrace{(o, (\square \upharpoonright Q \times Q))}^{\mathtt{fin}} \subseteq Q$.

...

<u>Beweis **348-10**</u> ...

`2.c):` Aus `1.1`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus →)“... Q Menge”,
`1.2`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q”

folgt via **347-2**: $\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}$ Relation.

`2.d):` Aus `1.1`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus →)“... Q Menge”,
aus `1.2`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q”

folgt via **347-2**: $\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}$ Funktion.

`2.e):` Aus `1.1`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus →)“... Q Menge”,
aus `1.2`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q”

folgt via **347-2**: $\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$.

`2.g):` Aus `1.1`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus →)“... Q Menge”,
aus `1.2`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q”

folgt via **347-2**: $(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(0) = o$.

`2.h):` Aus `1.1`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus →)“... Q Menge”,
`1.2`“$(\square \downharpoonleft Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\square \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q”

folgt via **347-2**: $\forall \alpha : (\alpha \in Q) \Rightarrow ((\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\}) = \alpha)$.

...

<u>Beweis</u> **348-10** ...

`2.1:` Aus `1.1`“$(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$ Algebra in Q”,
aus →) “... Q Menge”,
aus `1.2`“$(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$neutral auf Q”

folgt via **347-2**: $\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}}$ ist $(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$ _Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

`2.2:` Aus `1.1`“$(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$ Algebra in Q”,
aus →) “... Q Menge”,
aus `1.2`“$(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$neutral auf Q”
folgt via **347-2**:
$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in Q)\wedge(\alpha\notin\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)))$

$$\Rightarrow((\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\}\cup\beta)=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta))_{\_}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)\,_{\_}\alpha.$$

`2.3:` Aus `1.1`“$(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$ Algebra in Q”,
aus →) “... Q Menge”,
aus `1.2`“$(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\Box\downharpoonleft Q\times Q)$neutral auf Q”
folgt via **347-19**:

$$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)_{\_}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)\,_{\_}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)_{\_}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)\,_{\_}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})E).$$

...

Beweis **348-10** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\qquad\gamma, \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

4.1: Aus Thema3 "$\gamma \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und

aus 2.e) "$\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$"

folgt via **folk**: $\quad(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma) \in Q$.

4.2: Aus Thema3 "$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und

aus 2.e) "$\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$"

folgt via **folk**: $\quad(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta) \in Q$.

5: Aus 4.1 "$(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma) \in Q$",

aus 4.2 "$(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta) \in Q$" und

aus 1.4 "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q)$

$\Rightarrow (\alpha\,{}_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)\,{}_{-}\beta) = \alpha\,{}_{-}\Box\,{}_{-}\beta)$"

folgt:

$$(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)\,{}_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)\,{}_{-}(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)$$
$$= (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)\,{}_{-}\Box\,{}_{-}(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta).$$

Ergo Thema3:

$\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow \quad (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)\,{}_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)\,{}_{-}(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)$$
$$= (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)\,{}_{-}\Box\,{}_{-}(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta).$$

Konsequenz:

Ai) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow \quad (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)\,{}_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)\,{}_{-}(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)$$
$$= (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)\,{}_{-}\Box\,{}_{-}(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)\text{"}$$

. . .

<u>Beweis **348-10**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $(\gamma,\delta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))\wedge(\gamma\cap\delta=0).$

`5.1:` Aus `Thema4.1`“$\gamma,\delta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)\dots$” und
aus `Ai)`
folgt:

$$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta).$$

`5.2:` Aus `2.1`“$\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}}$ ist $(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}$Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$” und
aus `Thema4.1`“$(\gamma,\delta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))\wedge(\gamma\cap\delta=0)$”
folgt via **348-7**:

$$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma\cup\delta)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta).$$

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt:

$$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma\cup\delta)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta).$$

Ergo `Thema4.1`:

`A1` | “$\forall\gamma,\delta:(\gamma,\delta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))\wedge(\gamma\cap\delta=0)$

$$\Rightarrow\quad(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma\cup\delta)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)\text{”}$$

...

Beweis **348-10** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.2}}$ $(\gamma, \delta \in Q) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

5.1: Aus 1.1"$(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q",
aus →) "... Q Menge",
aus 1.2"$(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q",
aus 1.3"o ist $(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q",
aus Thema4.2"$\gamma, \delta \in Q \ldots$" und
aus Thema4.2"$\gamma \neq \delta$"
folgt via **347-11**:

$$\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\{\gamma, \delta\}) = \gamma_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\delta.$$

5.2: Aus Thema4.2"$\gamma, \delta \in Q \ldots$" und
aus 1.4"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q)$
$\Rightarrow (\alpha_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\beta) = \alpha_{-}\Box_{-}\beta)$"
folgt: $\gamma_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\delta = \gamma_{-}\Box_{-}\delta$.

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt: $\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\{\gamma, \delta\}) = \gamma_{-}\Box_{-}\delta$.

Ergo Thema4.2:

$$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in Q) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow (\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\{\gamma, \delta\}) = \gamma_{-}\Box_{-}\delta)$$

Konsequenz:

Aj) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in Q) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\texttt{fin}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha_{-}\Box_{-}\beta)$"

...

Beweis **348-10** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.3}}$ $(\gamma \in Q) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$

`5.1:` Aus `Thema4.3`“$(\gamma \in Q) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$” und
aus `2.2`“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)))$

$$\Rightarrow ((\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\} \cup \beta) = (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta))_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\alpha\text{”}$$

folgt:

$$(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\gamma\} \cup \delta) = (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\gamma.$$

`5.2:` Aus `Thema4.3`“$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$” und
aus `2.e)`“$\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}} : \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \to Q$”
folgt via **folk**: $((\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}))(\delta) \in Q.$

`6:` Aus `Thema4.3`“$\gamma \in Q \ldots$”,
aus `5.2`“$((\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}))(\delta) \in Q$” und
aus `1.4`“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q)$

$$\Rightarrow (\alpha_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\beta) = \alpha_{-}\Box_{-}\beta)\text{”}$$

folgt:

$$((\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}))(\delta)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\gamma = ((\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}))(\delta)_{-}\Box_{-}\gamma.$$

`7:` Aus `5.1` und
aus `6`
folgt:

$$(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\gamma\} \cup \delta) = (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)_{-}\Box_{-}\gamma.$$

...

Beweis **348-10** ... Ergo `Thema4.3`: $\forall\gamma,\delta:(\gamma\in Q)\wedge(\gamma\notin\delta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow((\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\gamma\}\cup\delta)=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)_{-}\Box_{-}\gamma).$$

Konsequenz:

`Ak)`	"$\forall\alpha,\beta:(\alpha\in Q)\wedge(\alpha\notin\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$ $\Rightarrow((\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\}\cup\beta)=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)_{-}\Box_{-}\alpha)$"

`4.4:` Es gilt: $(E,D\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))\vee(E\notin\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(D))\vee(D\notin\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$.

`Fallunterscheidung`

`4.4.1.Fall` $E,D\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

`5.1:` Aus `4.4.1.Fall`"$E,D\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und
aus `Ai)`"$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow\quad(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)\text{"}$$

folgt:
$$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D).$$

`5.2:` Aus `4.4.1.Fall`"$\ldots D\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$",
aus `4.4.1.Fall`"$E\ldots\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und
aus `Ai)`"$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow\quad(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)\text{"}$$

folgt:
$$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E).$$

`6:` Aus `2.3`"$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$
$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)_{-}(\Box\downharpoonleft Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})E)$",
aus `5.1` und
aus `5.2`

folgt:
$$(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E).$$

...

<u>Beweis **348-10**</u> ...

4.4: Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(D)) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.4.2.Fall}}$ $E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$.

5: Aus 2.e) “$\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}}: \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \to Q$” und aus 4.4.2.Fall “$E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$”

folgt via **94-12**: $(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E) = \mathcal{U}$.

6: $$(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$$
$$\stackrel{5}{=} \mathcal{U}\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D) \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}$$
$$\stackrel{\textbf{folk}}{=} (\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)\_\square\_\mathcal{U}$$
$$\stackrel{5}{=} (\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E).$$

7: Aus 6

folgt: $$(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$$
$$= (\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonright Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E).$$

...

Beweis **348-10** ...

4.4: Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(D)) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.4.3.Fall}}$ $D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

5: Aus 2.e) "$\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}: \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$" und aus 4.4.3.Fall "$D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$"

folgt via **94-12**: $(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D) = \mathcal{U}$.

6: $(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$

$\stackrel{5}{=} (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\Box\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{folk}}{=} \mathcal{U}$

$\stackrel{\mathbf{folk}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)$

$\stackrel{5}{=} (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)$.

7: Aus 6

folgt: $(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$

$= (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

A1) "$(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$

$= (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)$"

...

<u>Beweis</u> **<u>348-10</u>** ...

4.5: Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(D)) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$.

`Fallunterscheidung`

`4.5.1.Fall` $E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

5.1: Aus `4.5.1.Fall`“$E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$” und
aus `Ai)`“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\alpha)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\beta)$$
$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\alpha)_{-}\Box_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\beta)\text{”}$$

folgt:
$$\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(D)$$
$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E)_{-}\Box_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(D).$$

5.2: Aus `4.5.1.Fall`“$E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$”
folgt via **347-5**: $E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

5.3: Aus `4.5.1.Fall`“$E \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$”
folgt via **32-5**: $E \cap D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

5.4: Aus `1.1`“$(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$ Algebra in Q”,
aus $\rightarrowtail$)“$\ldots Q$ Menge”,
aus `1.2`“$(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q” und
aus `1.3`“o ist $(\Box \downharpoonleft Q \times Q)$neutral auf Q”
folgt via **347-19**:

$$\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E \cup D)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E \cap D)$$
$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(D).$$

6: Aus `5.2`“$E \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$”,
aus `5.3`“$E \cap D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$” und
aus `Ai)`“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\Rightarrow \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\alpha)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\beta)$$
$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\alpha)_{-}\Box_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(\beta)\text{”}$$

folgt:
$$\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E \cup D)_{-}(\Box \downharpoonleft Q \times Q)_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E \cap D)$$
$$= \overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E \cup D)_{-}\Box_{-}\overbrace{(o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q))}^{\mathtt{fin}}(E \cap D).$$

...

...

<u>Beweis **348-10**</u> . . .

`4.5:` Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(D)) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$.

`Fallunterscheidung`

`4.5.1.Fall` $E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

. . .

`7:` Aus `5.4`,
aus `6` und
aus `5.1`
folgt: $\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cup D)\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cap D)$
$= \overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E)\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(D)$.

`4.5.2.Fall` $E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

`5.1:` Aus `4.5.2.Fall`“$E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$” und
aus `2.e)`“$\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}}: \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$”
folgt via **94-12**: $\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E) = \mathcal{U}$.

`5.2:` Aus `4.5.2.Fall`“$E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$”
folgt via **348-9**: $E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

`6:` Aus `5.2`“$E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$” und
aus `2.e)`“$\overbrace{o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q)}^{\texttt{fin}}: \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$”
folgt via **94-12**: $\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cup D) = \mathcal{U}$.

`7:` $\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cup D)\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cap D)$
$\stackrel{6}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cap D) \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}$
$\stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(D)$
$\stackrel{5.1}{=} \overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E)\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(D)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cup D)\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E\cap D)$
$= \overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(E)\_\Box\_\overbrace{(o,(\Box\downharpoonleft Q\times Q))}^{\texttt{fin}}(D)$.

. . .

Beweis **348-10** ...

4.5: Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(D)) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.5.3.Fall}}$ $D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

5.1: Aus 4.5.3.Fall "$D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und

aus 2.e) "$\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$"

folgt via **94-12**: $(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D) = \mathcal{U}$.

5.2: Aus 4.5.3.Fall "$D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$"
folgt via **348-9**: $E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

6: Aus 5.2 "$E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und

aus 2.e) "$\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$"

folgt via **94-12**: $(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cup D) = \mathcal{U}$.

7: $$(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cup D)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cap D)$$
$$\overset{6}{=} \mathcal{U}\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cap D) \overset{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}$$
$$\overset{\textbf{folk}}{=} (\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\square\_\mathcal{U}$$
$$\overset{5.1}{=} (\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D).$$

8: Aus 7

folgt: $$(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cup D)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cap D)$$
$$= (\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

Am) "$(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cup D)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E \cap D)$
$= (\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(E)\_\square\_(\overbrace{o, (\square \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$"

Beweis **348-10** ...

`5.f):` Aus `2.d)` "$\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}}$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$

$$\Rightarrow \quad (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma \cup \delta)$$
$$= (\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\gamma)\_\Box\_(\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}})(\delta)\text{"}$$

folgt via **346-1(Def)**:

$$\overbrace{o, (\Box \downharpoonleft Q \times Q)}^{\texttt{fin}} \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q).$$

$\Box$

348-11. Nun soll **348-10** auf die Multiplikation angewendet werden.

348-11(Satz) *Es gelte:*

→) M *assoziativ auf* x.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$.

→) $1 \in x$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

b) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}) \subseteq x$.

c) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}$ *Relation.*

d) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}$ *Funktion.*

e) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \to x$.

f) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}$ *ist* M_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

g) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(0) = 0$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \alpha)$.

i) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in x) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha \cdot \beta)$.

j) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)))$
$\Rightarrow (\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\beta) \cdot \alpha)$.

k) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(E \cup D) \cdot \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(E \cap D) = \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(E) \cdot \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(D)$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **348-11**</u>

`1:` Aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus $\rightarrowtail$) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$"
folgt via **348-4**: $x \subseteq \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1`"$x \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: x Menge.

`2.2:` Aus **248-1**"M kommutativ auf $\mathbb{A}$" und
aus `1`"$x \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **210-2**: M kommutativ auf x.

`3:` Aus `2.2`"M kommutativ auf x" und
aus $\rightarrowtail$) "M assoziativ auf x"
folgt via **344-15**: M tunnelt rechts auf x.

`4.1:` Aus **AAII**"M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus $\rightarrowtail$) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$",
aus `3`"M tunnelt rechts auf x",
aus $\rightarrowtail$) "$1 \in x$" und
aus `2.1`"x Menge"

folgt via **348-10**: $\mathsf{dom}\,(\overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonright x \times x)}^{\texttt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`4.2:` Aus **AAII**"M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus $\rightarrowtail$) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$",
aus `3`"M tunnelt rechts auf x",
aus $\rightarrowtail$) "$1 \in x$" und
aus `2.1`"x Menge"

folgt via **348-10**: $\mathsf{ran}\,(\overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonright x \times x)}^{\texttt{fin}}) \subseteq x$.

`4.3:` Aus **AAII**"M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus $\rightarrowtail$) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$",
aus `3`"M tunnelt rechts auf x",
aus $\rightarrowtail$) "$1 \in x$" und
aus `2.1`"x Menge"

folgt via **348-10**: $\overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonright x \times x)}^{\texttt{fin}}$ Relation.

...

<u>Beweis **348-11**</u> ...

4.4: Aus **AAII** "M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2** "1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$",
aus 3 "M tunnelt rechts auf x",
aus →) "$1 \in x$" und
aus 2.1 "x Menge"

folgt via **348-10**: $\overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\texttt{fin}}$ Funktion.

4.5: Aus **AAII** "M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2** "1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$",
aus 3 "M tunnelt rechts auf x",
aus →) "$1 \in x$" und
aus 2.1 "x Menge"

folgt via **348-10**: $\overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\texttt{fin}}: \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \to x$.

4.6: Aus **AAII** "M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2** "1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$",
aus 3 "M tunnelt rechts auf x",
aus →) "$1 \in x$" und
aus 2.1 "x Menge"

folgt via **348-10**: $\overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\texttt{fin}}$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

4.7: Aus **AAII** "M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2** "1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$",
aus 3 "M tunnelt rechts auf x",
aus →) "$1 \in x$" und
aus 2.1 "x Menge"

folgt via **348-10**: $(\overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\texttt{fin}})(0) = 1$.

...

<u>Beweis **348-11**</u> ...

4.8: Aus **AAII**"M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →)"$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow(\alpha\cdot\beta\in x)$",
aus 3"M tunnelt rechts auf x",
aus →)"$1\in x$" und
aus 2.1"x Menge"
folgt via **348-10**: $\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow((\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\}=\alpha))$.

4.9: Aus **AAII**"M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →)"$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow(\alpha\cdot\beta\in x)$",
aus 3"M tunnelt rechts auf x",
aus →)"$1\in x$" und
aus 2.1"x Menge"
folgt via **348-10**:

$$\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta\in x)\wedge(\alpha\neq\beta))\Rightarrow((\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha,\beta\})=\alpha\cdot\beta).$$

4.10: Aus **AAII**"M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →)"$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow(\alpha\cdot\beta\in x)$",
aus 3"M tunnelt rechts auf x",
aus →)"$1\in x$" und
aus 2.1"x Menge"
folgt via **348-10**:

$$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in x)\wedge(\alpha\notin\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)))$$
$$\Rightarrow((\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\}\cup\beta)=(\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(\beta))\cdot\alpha.$$

4.11: Aus **AAII**"M Algebra auf $\mathbb{A}$",
aus **348-2**"1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$",
aus →)"$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow(\alpha\cdot\beta\in x)$",
aus 3"M tunnelt rechts auf x",
aus →)"$1\in x$" und
aus 2.1"x Menge"
folgt via **348-10**:

$$(\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(E\cup D)\cdot(\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(E\cap D)$$
$$=(\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(E)\cdot(\overbrace{o,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\texttt{fin}})(D).$$

...

<u>Beweis **348-11**</u> ...

`5.a):` Aus `4.1` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`5.b):` Aus `4.2` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}) \subseteq x$.

`5.c):` Aus `4.3` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}$ Relation.

`5.d):` Aus `4.4` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}$ Funktion.

`5.e):` Aus `4.5` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} : \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \to x$.

`5.f):` Aus `4.6` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`5.g):` Aus `4.7` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(0) = 1$.

`5.h):` Aus `4.8` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\} = \alpha))$.

`5.i):` Aus `4.9` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in x) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha \cdot \beta)$.

...

<u>Beweis **348-11**</u> ...

`5.j):` Aus `4.10` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x))) \Rightarrow (\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(\beta) \cdot \alpha).$

`5.k):` Aus `4.1` und

aus **348-1(Def)** "$\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \overbrace{o, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathtt{fin}}$"
folgt: $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(E \cup D) \cdot \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(E \cap D) = \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(E) \cdot \mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}}(D).$

□

348-12. Hier wird **348-11** auf $x = \mathbb{T}$ angewendet.

<u>348-12(Satz)</u>

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})$.

b) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}) \subseteq \mathbb{T}$.

c) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}$ *Relation.*

d) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}$ *Funktion.*

e) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T}) \to \mathbb{T}$.

f) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}$ *ist* M_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})$.

g) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(0) = 1$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\{\alpha\}) = \alpha)$.

i) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha \cdot \beta)$.

j) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})))$
$\Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\beta) \cdot \alpha)$.

k) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(E \cup D) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(E \cap D) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(E) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(D)$.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **348-12**</u>

`1.a)`: Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$”,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})$.

`1.b)`: Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$”,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}) \subseteq \mathbb{T}$.

`1.c)`: Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$”,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}$ Relation.

...

Beweis **348-12** ...

1.d): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}$ Funktion.

1.e): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T}) \to \mathbb{T}$.

1.f): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})$.

1.g): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(0) = 1$.

1.h): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\{\alpha\}) = \alpha)$.

1.i): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha \cdot \beta).$$

1.j): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T}))) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(\beta) \cdot \alpha).$$

1.k): Aus **348-2**“M assoziativ auf $\mathbb{T}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$” und
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(E \cup D) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(E \cap D) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(E) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(D)$.

$\square$

348-13. Hier wird **348-11** auf $x = \mathbb{C}$ angewendet.

<u>348-13(Satz)</u>

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})$.

b) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{C}$.

c) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}$ *Relation.*

d) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}$ *Funktion.*

e) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

f) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}$ *ist* M*_Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})$.

g) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(0) = 1$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\{\alpha\}) = \alpha)$.

i) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha \cdot \beta)$.

j) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})))$
$\Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\beta) \cdot \alpha)$.

k) $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(E \cup D) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(E \cap D) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(E) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(D)$.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **348-13**</u>

`1.a)`: Aus **348-2**“ M assoziativ auf $\mathbb{C}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$” und
aus $\in$**schola**“ $1 \in \mathbb{C}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})$.

`1.b)`: Aus **348-2**“ M assoziativ auf $\mathbb{C}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$” und
aus $\in$**schola**“ $1 \in \mathbb{C}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{C}$.

`1.c)`: Aus **348-2**“ M assoziativ auf $\mathbb{C}$” ,
aus **348-2**“$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$” und
aus $\in$**schola**“ $1 \in \mathbb{C}$”
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}$ Relation.

...

Beweis **348-13** ...

`1.d)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}$ Funktion.

`1.e)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

`1.f)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})$.

`1.g)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(0) = 1$.

`1.h)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\{\alpha\}) = \alpha)$.

`1.i)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\{\alpha, \beta\}) = \alpha \cdot \beta).$$

`1.j)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C}))) \Rightarrow (\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\{\alpha\} \cup \beta) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(\beta) \cdot \alpha).$$

`1.k)`: Aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **348-11**: $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(E \cup D) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(E \cap D) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(E) \cdot \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(D)$.

□

348-14. Wird bei der Definition von $\mathsf{337.1}(x,y)$ auf "$\omega \in \mathsf{dom}\, x$" verzichtet, ergibt sich $\mathsf{348.0}(x,y)$.

348-14(Definition)

$$\mathsf{348.0}(x,y) = \{\omega : x(\omega) = y(\omega)\}.$$

348-15. $\mathbb{R}$ hat die im gegenwärtigen Zustand etwas verunsichernde Eigenschaft, sowohl eine Teilmenge von $\mathbb{T}$ als auch von $\mathbb{C}$ zu sein. Welche der Funktionen $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}$ und $\mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}$ soll nun angewendet werden, um das Produkt endlich vieler reeller Zahlen zu ermitteln? Erwarteter Weise liefern beide Funktionen das gleiche Resultat. Hierzu ein vorbereitendes Resultat mit Induktions-Beweis.

348-15(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) ϕ *ist* $\Box\_$*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

$\rightarrow$) ψ *ist* $\Box\_$*Gewicht auf* $\mathfrak{N}$.

$\rightarrow$) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$.

$\rightarrow$) $\phi(0) = \psi(0)$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\phi(\{\alpha\}) = \psi(\{\alpha\}))$.

Dann folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Rightarrow (\phi(\alpha) = \psi(\alpha))$".

<u>Beweis **348-15**</u>

$\mathtt{348.0}(x,y) = \{\omega : x(\omega) = y(\omega)\}$
<u>ALG-**Notation**</u>.

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\phi(0) = \psi(0)$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in \mathtt{348.0}(\phi,\psi)$.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $(\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathtt{348.0}(\phi,\psi))$.

3.1: Aus Thema2 "$\gamma \in A \ldots$"
folgt via **32-5**: $\{\gamma\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

3.2: Aus Thema2 "$\gamma \in A \ldots$" und
aus Thema2 "$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \ldots$"
folgt via **32-5**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

3.3: Aus Thema2 "$\ldots \gamma \notin \delta \ldots$"
folgt via **2-30**: $\{\gamma\} \cap \delta = 0$.

3.4: Aus Thema2 "$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathtt{348.0}(\phi,\psi)$"
folgt via **folk**: $(\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \wedge (\delta \in \mathtt{348.0}(\phi,\psi))$.

3.5: Aus Thema2 "$\gamma \in A \ldots$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow (\phi(\{\alpha\}) = \psi(\{\alpha\}))$"
folgt: $\phi(\{\gamma\}) = \psi(\{\gamma\})$.

...

...

<u>Beweis **348-15**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $(\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{348.0}(\phi, \psi))$.

...

`4.1:` Aus `3.1` “$\{\gamma\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus →) “$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathfrak{M} \ldots$”
folgt via **0-4**: $\{\gamma\} \in \mathfrak{M}$.

`4.2:` Aus `3.1` “$\{\gamma\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus →) “$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \ldots \mathfrak{N}$”
folgt via **0-4**: $\{\gamma\} \in \mathfrak{N}$.

`4.3:` Aus `3.4` “$\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \ldots$” und
aus →) “$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathfrak{M} \ldots$”
folgt via **0-4**: $\delta \in \mathfrak{M}$.

`4.4:` Aus `3.4` “$\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \ldots$” und
aus →) “$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \ldots \mathfrak{N}$”
folgt via **0-4**: $\delta \in \mathfrak{N}$.

`4.5:` Aus `3.2` “$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus →) “$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathfrak{M} \ldots$”
folgt via **0-4**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathfrak{M}$.

`4.6:` Aus `3.2` “$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus →) “$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \ldots \mathfrak{N}$”
folgt via **0-4**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathfrak{N}$.

`4.7:` Aus `3.4` “$\ldots \delta \in \mathsf{348.0}(\phi, \psi)$”
folgt **p.def.**: $\phi(\delta) = \psi(\delta)$.

`4.8:` Aus `3.2` “$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$”
folgt via **ElementAxiom**: $\{\gamma\} \cup \delta$ Menge.

...

...

<u>Beweis</u> **<u>348-15</u>** . . .

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\qquad (\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{348.0}(\phi, \psi)\,)$.

. . .

`5.1:` Aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$",
aus `4.1` "$\{\gamma\} \in \mathfrak{M}$",
aus `4.3` "$\delta \in \mathfrak{M}$",
aus `4.5` "$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathfrak{M}$" und
aus `3.3` "$\{\gamma\} \cap \delta = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\quad \phi(\{\gamma\} \cup \delta) = \phi(\{\gamma\})\_\Box\_\phi(\delta)$.

`5.2:` Aus →) "ψ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{N}$",
aus `4.2` "$\{\gamma\} \in \mathfrak{N}$",
aus `4.4` "$\delta \in \mathfrak{N}$",
aus `4.6` "$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathfrak{N}$" und
aus `3.3` "$\{\gamma\} \cap \delta = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\quad \psi(\{\gamma\} \cup \delta) = \psi(\{\gamma\})\_\Box\_\psi(\delta)$.

`6:` $\phi(\{\gamma\} \cup \delta) \stackrel{\mathsf{5.1}}{=} \phi(\{\gamma\})\_\Box\_\phi(\delta) \stackrel{\mathsf{3.5}}{=} \psi(\{\gamma\})\_\Box\_\phi(\delta)$
$\stackrel{\mathsf{4.7}}{=} \psi(\{\gamma\})\_\Box\_\psi(\delta) \stackrel{\mathsf{5.2}}{=} \psi(\{\psi\} \cup \delta)$.

`7:` Aus `6` "$\phi(\{\gamma\} \cup \delta) = \ldots = \psi(\{\gamma\} \cup \delta)$" und
aus `4.8` "$\{\gamma\} \cup \delta$ Menge"
folgt **p.def.**: $\quad \{\gamma\} \cup \delta \in \mathsf{348.0}(\phi, \psi)$.

Ergo `Thema2`:

`A1`	"$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \cap \mathsf{348.0}(\phi, \psi)\,))$ $\Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \mathsf{348.0}(\phi, \psi)\,)$"

. . .

<u>Beweis **348-15**</u> ...

3: Aus 1 "$0 \in \mathsf{348.0}(\phi, \psi)$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \cap \mathsf{348.0}(\phi, \psi)))$
$\Rightarrow (\{\gamma\} \cup \delta \in \mathsf{348.0}(\phi, \psi))$"
folgt via **347-3**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \subseteq \mathsf{348.0}(\phi, \psi)$.

> $\boxed{\texttt{Thema4}}$ $\gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.
>
> 5: Aus Thema4 "$\gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$" und
> aus 3 "$\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) \subseteq \mathsf{348.0}(\phi, \psi)$"
> folgt via **0-4**: $\gamma \in \mathsf{348.0}(\phi, \psi)$.
>
> 6: Aus 5 "$\gamma \in \mathsf{348.0}(\phi, \psi)$"
> folgt **p.def.**: $\phi(\gamma) = \psi(\gamma)$.

Ergo Thema4: $\forall \gamma : (\gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)) \Rightarrow (\phi(\gamma) = \psi(\gamma))$.

Konsequenz: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)) \Rightarrow (\phi(\alpha) = \psi(\alpha))$.

□

348-16. $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}$ und $\mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}$ stimmen auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R})$ überein. Die Beweis-Reihenfolge ist `ab) - d) - c)`.

348-16(Satz)

a) $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(0) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(0)$.

b) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}))$.

c) $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha,\beta\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha,\beta\}))$.

d) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R})) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

Beweis **348-16**

`1.a)`: Aus **348-12**“$\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(0) = 1$” und
aus **348-13**“$\mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(0) = 1$”
folgt: $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(0) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(0)$.

`Thema2` $\alpha \in \mathbb{R}$.

`2.1`: Aus `Thema2`“$\alpha \in \mathbb{R}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $\alpha \in \mathbb{T}$.

`2.2`: Aus `Thema2`“$\alpha \in \mathbb{R}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $\alpha \in \mathbb{C}$.

`3.1`: Aus `2.1`“$\alpha \in \mathbb{T}$”
folgt via **348-12**: $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \alpha$.

`3.2`: Aus `2.2`“$\alpha \in \mathbb{C}$”
folgt via **348-13**: $\mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \alpha$.

`4`: Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\})$.

Ergo `Thema2`: `Ab)` “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}))$”

...

Beweis **348-16** ...

3.1: Aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})$.

3.2: Aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})$.

4.d): Aus **348-12**"$\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})$",
aus **348-13**"$\mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})$",
aus 3.1"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})$",
aus 3.2"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})$",
aus 1.a)"$\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(0) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(0)$" und
aus Ab) gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha\}))$"
folgt via **348-15**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R})) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

Thema5 $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

6: Aus Thema5"$\gamma, \delta \in \mathbb{R}$"
folgt via **223-1**: $\{\gamma, \delta\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R})$.

7: Aus 6 und
aus 4.d)
folgt: $\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\gamma, \delta\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\gamma, \delta\})$.

Ergo Thema5: $\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\gamma, \delta\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\gamma, \delta\}))$.

Konsequenz: Ac) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{M}_{\mathbb{T}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha, \beta\}) = \mathsf{M}_{\mathbb{C}}^{\mathtt{fin}}(\{\alpha, \beta\}))$"

□

Arithmetik: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(n) = ((-1+n)\cdot n) : 2$.
$M[\{p\}] = [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$. $M^{-1}[\{p\}] = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.
Ergänzung InfSupSatz. Ergänzung SupInfSatz.

Ersterstellung: 30/06/15 **Letzte Änderung: 30/06/15**

349-1. Die bekannte Formel $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(n) = ((-1+n)\cdot n) : 2$, $n \in \mathbb{N}$, soll hier bewiesen werden. Wenig überraschend wird ein Induktions-Beweis geführt. Die dazu passende Klassen-Klammer wird hier vorgestellt.

349-1(Definition)

$$\mathsf{329.0}() = \{\omega : \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\omega) = ((-1+\omega)\cdot\omega) : 2\}.$$

`RECH`-**Notation**.

349-2. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ und $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{N})$.

349-2(Satz)

a) $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

b) $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{N})$.

c) $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A})$.

d) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$"
folgt "$x + ((-1 + x) \cdot x) : 2 = ((-1 + (1 + x)) \cdot (1 + x)) : 2$".

Beweis **349-2** a)

`Thema0` $\alpha \in \mathbb{N}$.

1: Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **241-1**: α endlich.

2: Aus 1"α endlich"
folgt via **28-7**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

<u>Beweis</u> **349-2** `b)`

`Thema0` $\alpha \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $\alpha \subseteq \mathbb{N}$.

`1.2:` Asu `Thema0`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **241-1**: α endlich.

`2:` Aus `1.1`"$\alpha \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"α endlich"
folgt via **32-4**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$.

`c)`

`1:` Aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$.

`3:` Aus `2`"$\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$" und
aus `1`"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

<u>Beweis **349-2**</u> `d) VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus $\neq$**schola**"$0 \neq 2$" ,
aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **DKR**$\mathbb{C}$: $(2 \cdot x) : 2 = x$.

`1.2:` Aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-7**: $(2 \cdot x) : 2 + ((-1 + x) \cdot x) : 2 = (2 \cdot x + (-1 + x) \cdot x) : 2$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $x \cdot (2 + (-1 + x)) = x \cdot 2 + x \cdot (-1 + x)$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1.4`"x Zahl"
folgt via **237-4**: $-1 + (1 + x) = x$.

`3:` $x + ((-1 + x) \cdot x) : 2 \stackrel{1.1}{=} (2 \cdot x) : 2 + ((-1 + x) \cdot x) : 2$

$$\stackrel{1.2}{=} (2 \cdot x + (-1 + x) \cdot x) : 2$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x \cdot 2 + (-1 + x) \cdot x) : 2 \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x \cdot 2 + x \cdot (-1 + x)) : 2$$

$$\stackrel{1.3}{=} (x \cdot (2 + (-1 + x))) : 2 \stackrel{\mathbf{300-5}}{=} (x \cdot (1 + x)) : 2$$

$$\stackrel{2}{=} ((-1 + (1 + x)) \cdot (1 + x)) : 2.$$

$\square$

349-3. Ich konnte nicht widerstehen, die berühmte Formel $\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(n) = ((-1+n)\cdot n) : 2$, $n \in \mathbb{N}$, bereits hier zu bringen.

349-3(Satz)

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) = ((-1+\alpha)\cdot\alpha) : 2).$$

RECH-**Notation**.

Beweis **349-3**

$$\mathsf{349.0}() = \{\omega : \mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\omega) = ((-1+\omega)\cdot\omega) : 2\}.$$

1: $\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(0) \overset{\mathbf{348-3}}{=} 0 \overset{\mathbf{:schola}}{=} 0 : 2 \overset{\mathbf{\cdot schola}}{=} ((-1)\cdot 0) : 2 \overset{\mathbf{+schola}}{=} ((-1+0)\cdot 0) : 2.$

2: Aus 1 "$\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(0) = \ldots = ((-1+0)\cdot 0) : 2$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in \mathsf{349.0}()$.

...

<u>Beweis</u> **<u>349-3</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\beta \in \mathbb{N} \cap \mathsf{349.0}()$.

4: Aus Thema3 "$\beta \in \mathbb{N} \cap \mathsf{349.0}()$"
folgt via **folk**: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathsf{349.0}())$.

5.1: Aus 4 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via $\mathsf{A}\mathbb{N}$**Axiom**: $1 + \beta = \{\beta\} \cup \beta$.

5.2: Aus 4 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **197-4**: $\beta \notin \beta$.

5.3: Aus 4 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: β Zahl.

5.4: Aus 4 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus **349-2** "$\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt via **folk**: $\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A})$.

5.5: Aus 4 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\beta \in \mathbb{C}$.

5.6: Aus 4 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.

5.7: Aus 4 "$\ldots \beta \in \mathsf{349.0}()$"
folgt **p.def.**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) = ((-1 + \beta) \cdot \beta) : 2$.

6.1: Aus 5.3 "β Zahl",
aus 5.2 "$\beta \notin \beta$" und
aus 5.4 "$\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt via **348-3**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\beta\} \cup \beta) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) + \beta$.

6.2: Aus 5.5 "$\beta \in \mathbb{C}$"
folgt via **349-2**:
$$\beta + ((-1 + \beta) \cdot \beta) : 2 = ((-1 + (1 + \beta)) \cdot (1 + \beta)) : 2.$$

6.3: Aus 5.6 "$1 + \beta \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \beta$ Menge.

...

...

Beweis **349-3** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\beta \in \mathbb{N} \cap \mathsf{349.0()}$.

. . .

7: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(1+\beta) \stackrel{5.1}{=} \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\{\beta\} \cup \beta) \stackrel{6.1}{=} \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) + \beta$
$\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \beta + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) \stackrel{5.7}{=} \beta + ((-1+\beta)\cdot\beta) : 2$
$\stackrel{6.2}{=} ((-1+(1+\beta))\cdot(1+\beta)) : 2.$

8: Aus 7"$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(1+\beta)$
$= \ldots = ((-1+(1+\beta))\cdot(1+\beta)) : 2$" und
aus 6.3"$1+\beta$ Menge"
folgt **p.def.**: $1+\beta \in \mathsf{349.0()}$.

Ergo Thema3: A1 | "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap \mathsf{349.0()}) \Rightarrow (1+\beta \in \mathsf{349.0()})$"

4: Aus 2"$0 \in \mathsf{349.0()}$" und
aus A1 gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap \mathsf{349.0()}) \Rightarrow (1+\beta \in \mathsf{349.0()})$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{349.0()}$.

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

7: Aus Thema6"$\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus 4"$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{349.0()}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{349.0()}$.

8: Aus 7"$\alpha \in \mathsf{349.0()}$"
folgt **p.def.**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = ((-1+\alpha)\cdot\alpha) : 2.$

Ergo Thema6: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = ((-1+\alpha)\cdot\alpha) : 2).$

□

349-4. Im LW sollten Notationen vereinfacht und vereinheitlicht werden. Schon längere Zeit schien mir die Schreibweise $M[\{p\}]$ umständlich. Um den 350ten Essay fällt mir auf, dass $M[\{p\}]$ und $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ stets gleich sind.

349-4(Satz)

a) $M[\{p\}] = [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

b) $\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}] =]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

c) $M^{-1}[\{p\}] = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

d) $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] = \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

e) $[a \overset{M}{|} b] = M[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]$.

f) $]a \overset{M}{|} b[= \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}]$.

g) $]a \overset{M}{|} b] = \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]$.

h) $[a \overset{M}{|} b[= M[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}]$.

<u>Beweis **349-4**</u> `a)`

`Thema0.1` $\qquad \alpha \in M[\{p\}].$

`1:` Aus `Thema0.1` "$\alpha \in M[\{p\}]$"
folgt via **9-15**: $\qquad (p, \alpha) \in M.$

`2:` Aus `1`
folgt: $\qquad p\_M\_\alpha.$

`3:` Aus `2` "p_M_α"
folgt via **41-25**: $\qquad \alpha \in [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema0.1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in M[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A1` | "$M[\{p\}] \subseteq [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$"

`Thema0.2` $\qquad \alpha \in [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle.$

`1:` Aus `Thema0.2` "$\alpha \in [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $\qquad p\_M\_\alpha.$

`2:` Aus `1`
folgt: $\qquad (p, \alpha) \in M.$

`3:` Aus `2` "$(p, \alpha) \in M$"
folgt via **9-15**: $\qquad \alpha \in M[\{p\}].$

Ergo `Thema0.2`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \in M[\{p\}]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A2` | "$[p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq M[\{p\}]$"

`1:` Aus `A1` gleich "$M[\{p\}] \subseteq [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$" und
aus `A2` gleich "$[p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq M[\{p\}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\qquad M[\{p\}] = [p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle.$

<u>Beweis **349-4**</u> `b)`

`Thema0.1` $\qquad \alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}].$

1: Aus `Thema0.1` “$\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}]$”
folgt via **9-15**: $\qquad (p,\alpha) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}.$

2: Aus 1
folgt: $\qquad p{}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\alpha.$

3: Aus 2 “$p{}_{-}M{}_{-}\alpha$”
folgt via **41-25**: $\qquad \alpha \in \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema0.1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A1` | “$\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}] \subseteq \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

`Thema0.2` $\qquad \alpha \in \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

1: Aus `Thema0.2` “$\alpha \in \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $\qquad p{}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\alpha.$

2: Aus 1
folgt: $\qquad (p,\alpha) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}.$

3: Aus 2 “$(p,\alpha) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$”
folgt via **9-15**: $\qquad \alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}].$

Ergo `Thema0.2`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A2` | “$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}]$”

1: Aus `A1` gleich “$\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}] \subseteq \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `A2` gleich “$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\qquad \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}] = \,]p \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

<u>Beweis **349-4**</u> `c)`

`Thema0.1` $\alpha \in M^{-1}[\{p\}]$.

`1:` Aus `Thema0.1`“$\alpha \in M^{-1}[\{p\}]$”
folgt via **12-7**: $(\alpha, p) \in M$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\alpha{\_}M{\_}p$.

`3:` Aus `2`“$\alpha{\_}M{\_}p$”
folgt via **41-25**: $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in M^{-1}[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$M^{-1}[\{p\}] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$”

`Thema0.2` $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`1:` Aus `Thema0.2`“$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p]$”
folgt via **41-25**: $\alpha{\_}M{\_}p$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\alpha, p) \in M$.

`3:` Aus `2`“$(\alpha, p) \in M$”
folgt via **12-7**: $\alpha \in M^{-1}[\{p\}]$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p]) \Rightarrow (\alpha \in M^{-1}[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\langle\cdot \overset{M}{|} p] \subseteq M^{-1}[\{p\}]$”

`1:` Aus `A1` gleich “$M^{-1}[\{p\}] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$” und
aus `A2` gleich “$\langle\cdot \overset{M}{|} p] \subseteq M^{-1}[\{p\}]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $M^{-1}[\{p\}] = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

Beweis **349-4** `d)`

`Thema0.1` $\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}]$.

`1:` Aus `Thema0.1`“$\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}]$”
folgt via **12-7**: $(\alpha, p) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\alpha \,{}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\, p$.

`3:` Aus `2`“$\alpha \,{}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\, p$”
folgt via **41-25**: $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[$”

`Thema0.2` $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[$.

`1:` Aus `Thema0.2`“$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[$”
folgt via **41-25**: $\alpha \,{}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\, p$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\alpha, p) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$.

`3:` Aus `2`“$(\alpha, p) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$”
folgt via **12-7**: $\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}]$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\langle\cdot \overset{M}{\mid} p[\subseteq \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}]$”

`1:` Aus `A1` gleich “$\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[$” und
aus `A2` gleich “$\langle\cdot \overset{M}{\mid} p[\subseteq \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] = \langle\cdot \overset{M}{\mid} p[$.

<u>Beweis</u> **349-4** `e)`

`1.1:` Via **41-36** gilt: $\left[a \overset{M}{|} b\right] = \left[a \overset{M}{|} \cdot\right\rangle \cap \left\langle\cdot \overset{M}{|} b\right]$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $M[\{a\}] = \left[a \overset{M}{|} \cdot\right\rangle$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $M^{-1}[\{b\}] = \left\langle\cdot \overset{M}{|} b\right]$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\left[a \overset{M}{|} b\right] = M[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]$.

`f)`

`1.1:` Via **41-36** gilt: $\left]a \overset{M}{|} b\right[= \left]a \overset{M}{|} \cdot\right\rangle \cap \left\langle\cdot \overset{M}{|} b\right[$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] = \left]a \overset{M}{|} \cdot\right\rangle$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1}[\{b\}] = \left\langle\cdot \overset{M}{|} b\right[$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\left]a \overset{M}{|} b\right[= \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1}[\{b\}]$.

`g)`

`1.1:` Via **41-36** gilt: $\left]a \overset{M}{|} b\right] = \left]a \overset{M}{|} \cdot\right\rangle \cap \left\langle\cdot \overset{M}{|} b\right]$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] = \left]a \overset{M}{|} \cdot\right\rangle$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $M^{-1}[\{b\}] = \left\langle\cdot \overset{M}{|} b\right]$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\left]a \overset{M}{|} b\right] = \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]$.

<u>Beweis **349-4** `h)`</u>

`1.1:` Via **41-36** gilt: $$[a \overset{M}{|} b[= [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $$M[\{a\}] = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $$\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] = \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$$

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $$[a \overset{M}{|} b[= M[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}].$$

$\square$

349-5. Ungewöhnlich aber interessant ist $[p \overset{f}{|} \cdot\rangle$ für Funktionen f. Dabei spielt es keine Rolle, ob $p \in \mathsf{dom}\, f$ oder nicht.

349-5(Satz)

a) *Aus "f Funktion" folgt "$[p \overset{f}{|} \cdot\rangle = \{f(p)\}$".*

b) *Aus "x injektiv" folgt "$x^{-1}[\{p\}] = \{x^{-1}(p)\}$"*
und "$\langle \cdot \overset{x}{|} p] = \{x^{-1}(p)\}$".

Beweis **349-5** a) VS gleich f Funktion.

1: Via **349-4** gilt: $[p \overset{f}{|} \cdot\rangle = f[\{p\}]$.

2: Aus VS gleich "f Funktion"
folgt via **259-16**: $f[\{p\}] = \{f(p)\}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $[p \overset{f}{|} \cdot\rangle = \{f(p)\}$.

b) VS gleich x injektiv.

1: Aus VS gleich "x injektiv"
folgt via **19-1**: x^{-1} Funktion.

2: Aus 1 "x^{-1} Funktion"
folgt via **259-16**: $\boxed{x^{-1}[\{p\}] = \{x^{-1}(p)\}}$

3: Via **349-4** gilt: $\langle \cdot \overset{x}{|} p] = x^{-1}[\{p\}]$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\boxed{\langle \cdot \overset{x}{|} p] = \{x^{-1}(p)\}}$

□

349-6. Eine nette Ergänzung zum InfSupSatz.

349-6(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *inf ist M_Infimum von E.*

`ii)` *inf ist M_Maximum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$.*

$36.0(M, E) = \{\omega : \omega$ *untere M_Schranke von $E\}$.*

Beweis **349-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich inf ist M_Infimum von E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "inf ist M_Infimum von E"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere M_Schranke von E.

`1.2:` Aus `VS` gleich "inf ist M_Infimum von E"
folgt via **InfSupSatz**:
inf ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$.

`2:` Aus `1.1`"inf untere M_Schranke von E"
folgt via **36-15**: $inf \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$.

`3:` Aus `2`"$inf \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$" und
aus `1.2`"inf ist M_Supremum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$"
folgt via **38-7**:
inf ist M_Maximum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$.

<u>Beweis **349-6**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich inf ist M_Maximum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$.

`1`: Aus `VS` gleich "inf ist M_Maximum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von E" $\}$
folgt via **38-1(Def)**: $inf \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$.

`2`: Aus `1`"$inf \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$"
folgt **p.def.**: inf untere M_Schranke von E.

`Thema3` α untere M_Schranke von E.

`4`: Aus `Thema3`"α untere M_Schranke von E"
folgt via **36-15**: $\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$.

`5`: Aus `VS` gleich "inf ist M_Maximum von $\{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$" und
aus `4`"$\alpha \in \{\omega : \omega$ untere M_Schranke von $E\}$"
folgt via **38-7**: α_M_inf.

Ergo `Thema3`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha$_M_$inf)$"

`4`: Aus `2`"inf untere M_Schranke von E" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere M_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha$_M_$inf)$"
folgt via **36-1(Def)**: inf ist M_Infimum von E.

□

349-7. Eine nette Ergänzung zum SupInfSatz.

349-7(Satz) *Die Aussagen* i), ii) *sind äquivalent:*

i) *sup ist* M*_Supremum von* E.

ii) *sup ist* M*_Minimum von* $\{\omega : \omega$ *obere* M*_Schranke von* $E\}$.

$\mathtt{36.1}(M,E) = \{\omega : \omega$ *obere* M*_Schranke von* $E\}$.

Beweis **349-7** $\boxed{\boxed{\mathtt{i)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$ VS gleich *sup* ist M_Supremum von E.

1.1: Aus VS gleich "*sup* ist M_Supremum von E"
folgt via **36-1(Def)**: *sup* obere M_Schranke von E.

1.2: Aus VS gleich "*sup* ist M_Supremum von E"
folgt via **SupInfSatz**:
sup ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$.

2: Aus 1.1"*sup* obere M_Schranke von E"
folgt via **36-16**: $sup \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$.

3: Aus 2"$sup \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$" und
aus 1.2"*sup* ist M_Infimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$"
folgt via **38-6**:
sup ist M_Minimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$.

<u>Beweis **349-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\qquad$ sup ist M_Minimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "sup ist M_Minimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von E" $\}$
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad$ $sup \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$.

`2:` Aus `1`"$sup \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$"
folgt **p.def.**: $\qquad$ sup obere M_Schranke von E.

> `Thema3` $\qquad$ α obere M_Schranke von E.
>
> `4:` Aus `Thema3`"α obere M_Schranke von E"
> folgt via **36-16**: $\qquad$ $\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$.
>
> `5:` Aus `VS` gleich "sup ist M_Minimum von $\{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$" und
> aus `4`"$\alpha \in \{\omega : \omega$ obere M_Schranke von $E\}$"
> folgt via **38-6**: $\qquad$ sup_M_α.

Ergo `Thema3`: $\qquad$ `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $E) \Rightarrow (sup$_M_$\alpha)$"

`4:` Aus `2`"sup obere M_Schranke von E" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ obere M_Schranke von $E) \Rightarrow (sup$_M_$\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad$ sup ist M_Supremum von E.

$\square$

Analysis: R ist **ana2** von ϕ, q, x.
$\mathtt{rf2}\phi qx$.

Ersterstellung: 01/07/15 **Letzte Änderung: 01/07/15**

350-1. Nicht nur die Summe/das Produkt (geeigneter) Zahlenmengen ist von Interesse. Auch der Summe/dem Produkt von FunktiosWerten kommt Bedeutung zu. Damit ist auch der Titel "**Die den Weg Weisende**" von **Suite V** zunehmend gerechtfertigt. Die geänderte Reihenfolge bei der Bezeichnung der Variablen ist beabsichtigt,

350-1(Definition)

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu) \wedge(\exists\Omega,\Xi : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Gamma,\Xi : (\Phi\notin\Psi) \wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge((\Phi,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\Gamma)\in y) \wedge(\omega = (\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma)))\}.$$

350-2. Es wird ähnlich wie in **#337** vorgegangen.

350-2(Satz)

a) *Aus* "$(p,q) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$"

folgt "$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Xi : (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge((\Psi,\Omega) \in x) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),q) \in y)$
$\wedge(p = \{\Phi\} \cup \Psi)$".

b) *Aus* "$p \notin E$"
und "$(E,a) \in x$"
und "$(p,q) \in z$"
und "$((a,q),b) \in y$"
folgt "$(\{p\} \cup E, b) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$".

c) $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ *Relation.*

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge(\exists \Omega, \Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$$

<u>Beweis</u> **350-2** `a)` `VS` gleich $(p,q)\in\mathtt{350.0}(x,y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\mathtt{350.0}(x,y)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\mathtt{350.0}(x,y)$"
folgt **p.def.**:

$$\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Gamma,\Xi:(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge((\Phi,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\Gamma)\in y)\wedge((p,q)=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots(p,q)=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p=\{\Phi\}\cup\Psi)\wedge(q=\Gamma)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots q=\Gamma$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega,\Xi),q)=((\Omega,\Xi),\Gamma)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots((\Omega,\Xi),\Gamma)\in y\ldots$"
folgt: $((\Omega,\Xi),q)\in y$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists\Omega,\Phi,\Psi\ldots$",
aus `1.2`"$\exists\ldots\Xi\ldots$",
aus `1.2`"$\ldots(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge((\Phi,\Xi)\in z)\ldots$",
aus `4` und
aus `2`"$p=\{\Phi\}\cup\Psi\ldots$"
folgt:

$$\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Xi:(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge((\Phi,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),q)\in y)\wedge(p=\{\Phi\}\cup\Psi).$$

<u>Beweis</u> **350-2** `b)` `VS` gleich $(p \notin E) \wedge ((E, a) \in x) \wedge ((p, q) \in z) \wedge (((a, q), b) \in y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi = p) \wedge (\Psi = E)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((a, q), b) \in y$"
folgt: $\exists \Omega, \Gamma, \Xi : (\Omega = a) \wedge (\Gamma = b) \wedge (\Xi = q)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots (E, a) \in x \ldots$"
folgt via **9-15**: E Menge.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((a, q), b) \in y$"
folgt via **9-15**: b Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots (\Phi = p) \wedge (\Psi = E)$" und
aus `VS` gleich "$p \notin E \ldots$"
folgt: $\Phi \notin \Psi$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi = E$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega = a \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (E, a)$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = a \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Xi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Xi) = (a, q)$.

`2.4:` Aus `1.3`"E Menge"
folgt via **2-28**: $\{p\} \cup E$ Menge.

`2.5:` Aus `1.1`"$\ldots (\Phi = p) \wedge (\Psi = E)$"
folgt: $\{\Phi\} \cup \Psi = \{p\} \cup E$.

`2.6:` Aus `1.1`"$\ldots \Phi = p \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Xi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, \Xi) = (p, q)$.

...

<u>Beweis</u> **350-2** `b)` `VS` gleich $(p \notin E) \wedge ((E,a) \in x) \wedge ((p,q) \in z) \wedge (((a,q),b) \in y)$.

...

`3.1:` Aus `2.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots (E,a) \in x \ldots$"
folgt: $(\Psi,\Omega) \in x$.

`3.2:` Aus `2.3`"$(\Omega,\Xi) = (a,q)$" und
aus `1.2`"$\ldots \Gamma = b \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega,\Xi),\Gamma) = ((a,q),b)$.

`3.3:` Aus `2.4`"$\{p\} \cup E$ Menge" und
aus `1.4`"b Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{p\} \cup E, b)$ Menge.

`3.4:` Aus `2.5`"$\{\Phi\} \cup \Psi = \{p\} \cup E$" und
aus `1.2`"$\ldots \Gamma = b \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) = (\{p\} \cup E, b)$.

`3.5:` Aus `2.6`"$(\Phi,\Xi) = (p,q)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in z \ldots$"
folgt: $(\Phi,\Xi) \in z$.

`4.1:` Aus `3.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots ((a,q),b) \in y$"
folgt: $((\Omega,\Xi),\Gamma) \in y$.

`4.2:` Aus `3.4`
folgt: $(\{p\} \cup E, b) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.1`"$\exists \Phi, \Psi \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \ldots \Gamma, \Xi$",
aus `2.1`"$\Phi \notin \Psi$",
aus `3.1`"$(\Psi,\Omega) \in x$",
aus `3.5`"$(\Phi,\Xi) \in z$",
aus `4.1`"$((\Omega,\Xi),\Gamma) \in y$",
aus `4.2`"$(\{p\} \cup E, b) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$" und
aus `3.3`"$(\{p\} \cup E, b)$ Menge"
folgt **p.def.**: $(\{p\} \cup E, b) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$.

Beweis **350-2** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{350.0}(x,y)$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{350.0}(x,y)$ ”
folgt **p.def.**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y) \wedge (\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)).$$

`3.1:` Aus 2“$\ldots (\Psi, \Omega) \in x \ldots$”
folgt via **9-15**: Ψ Menge.

`3.2:` Aus 2“$\ldots ((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y \ldots$”
folgt via **9-15**: Γ Menge.

`4:` Aus `3.1`“Ψ Menge”
folgt via **2-28**: $\{\Phi\} \cup \Psi$ Menge.

`5:` Aus 4“$\{\Phi\} \cup \Psi$ Menge” und
aus `3.2`“Γ Menge”
folgt via **6-8**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`6:` Aus 2“$\ldots \alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$” und
aus 5
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{350.0}(x,z,y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{350.0}(x,z,y) \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ Relation.

□

350-3. Klassen, die **ana2** von ϕ, q, x sind, haben rekursive Eigenschaften.

350-3(Definition)

“ R **ist ana2 von** ϕ, q, x” genau dann, wenn gilt:

1) R Funktion.

2) $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

3) $R(0) = \{(0, q)\}$.

4) $\forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, x)\,)$.

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) \;= \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

RECH-Notation.

350-4. Beispielsweise ist $\{(0,\{(0,q)\})\}$ **ana2** von ϕ, q, x.

<u>350-4(Satz)</u>

a) $\{(0,\{(0,q)\})\}$ *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x.

b) *Aus "*R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x*"*
folgt "$0 \in \mathsf{dom}\, R$*" und "*$0 \neq \mathsf{dom}\, R$*" und "*R *Menge".*

c) *Aus "*q *Unmenge" und "*R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x*" folgt "*$R(0) = 0$*".*

<u>Beweis **350-4**</u>

$$350.0(x,z,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$$

<u>RECH-**Notation**</u>.

---

a)

1: Via **259-36** gilt: $\{(0,\{(0,q)\})\}$ Funktion.

2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0,q)\}$ Menge.

3.1: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus 2"$\{(0,q)\}$ Menge"
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}) = \{0\}$.

3.2: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus 2"$\{(0,q)\}$ Menge"
folgt via **259-37**: $(\{(0,\{(0,q)\})\})(0) = \{(0,q)\}$.

4: Aus **95-1(Def)**"$1 = \{0\}$" und
aus 3.1
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}) = 1$.

5: Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

...

Beweis **350-4** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\})$.

`8:` Aus `Thema7` "$\alpha \ldots \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\})$" und
aus `3.1`
folgt: $\alpha \in \{0\}$.

`9:` Aus `8` "$\alpha \in \{0\}$"
folgt via **folk**: $\alpha = 0$.

`10:` Aus `9` "$\alpha = 0$" und
aus +**schola** "$1+0=1$"
folgt: $1+\alpha = 1$.

`11:` Aus `10` und
aus `Thema7` "$\ldots 1+\alpha \in 1$"
folgt: $1 \in 1$.

`12:` Aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $1 \notin 1$.

Ergo `Thema7`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\})) \Rightarrow ((\{(0,\{(0,q)\})\})(1+\alpha) = \mathsf{350.0}((\{(0,\{(0,q)\})\})(\alpha), \phi, x))$"

`8:` Aus `1` "$\{(0,\{(0,q)\})\}$ Funktion",
aus `6` "$\mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `3.2` "$(\{(0,\{(0,q)\})\})(0) = \{(0,q)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}))$
$\Rightarrow ((\{(0,\{(0,q)\})\})(1+\alpha) = \mathsf{350.0}((\{(0,\{(0,q)\})\})(\alpha), \phi, x))$"
folgt via **350-3(Def)**: $\{(0,\{(0,q)\})\}$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

Beweis **350-4** `b)` `VS` gleich R ist **ana2** von ϕ, q, x.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $(R \text{ Funnktion}) \wedge((\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\}))$.

`2.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0, q)\}$ Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{dom}\, R$ Menge.

`3:` Aus `1`"$\ldots R(0) = \{(0, q)\}$" und
aus `2.1`
folgt: $R(0)$ Menge.

`4.1:` Aus `3`"$R(0)$ Menge"
folgt via **17-5**: $\boxed{0 \in \mathsf{dom}\, R}$

`4.2:` Aus `1`"R Funktion$\ldots$" und
aus `2.2`"$\mathsf{dom}\, R$ Menge"
folgt via **folk**: $\boxed{R \text{ Menge}}$

`5:` Aus `4.1`"$0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq \mathsf{dom}\, R}$

`c)` `VS` gleich $(q \text{ Unmenge}) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "q Unmenge$\ldots$"
folgt via **92-3**: $(0, q)$ Unmenge.

`2:` Aus `1`"$(0, q)$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{(0, q)\} = 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $R(0) = 0$.

□

350-5. Sind R, S **ana2** von ϕ, q, x und gilt $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$, so folgt $R \subseteq S$.

<u>**350-5(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) R, S *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$.

Dann folgt "$R \subseteq S$".

<u>Beweis **350-5**</u>

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, x))))$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "S ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $(S \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (S(0) = \{(0, q)\}) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, S) \Rightarrow (S(1 + \alpha) = \mathsf{350.0}(S(\alpha), \phi, x))))$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots R(0) = \{(0, q)\} \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots S(0) = \{(0, q)\} \ldots$"
folgt: $R(0) = S(0)$.

...

Beweis **350-5** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $(\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta))$.

`3.1:` Aus `Thema2.2`"$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1.1`"$\ldots \forall \alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R)$
$\Rightarrow (R(1+\alpha) = 350.0(R(\alpha), \phi, x)))$"
folgt: $R(1+\beta) = 350.0(R(\beta), \phi, x)$.

`3.2:` Aus `Thema2.2`"$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$"
folgt via **folk**: $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, S$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `Thema2.2`"$\ldots R(\beta) = S(\beta)$"
folgt: $R(1+\beta) = 350.0(S(\beta), \phi, x)$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, S$" und
aus `1.2`"$\ldots \forall \alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, S)$
$\Rightarrow (S(1+\alpha) = 350.0(S(\alpha), \phi, x)))$"
folgt: $S(1+\beta) = 350.0(S(\beta), \phi, x)$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $R(1+\beta) = S(1+\beta)$.

Ergo `Thema2.2`:

`A1`	"$\forall \beta : ((\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta))) \Rightarrow (R(1+\beta) = S(1+\beta))$"

`3:` Aus `1.1`"R Funktion..." ,
aus `1.2`"S Funktion..." ,
aus `2.3`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" ,
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$" ,
aus `2.2`"$R(0) = S(0)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta)))$
$\Rightarrow (R(1+\beta) = S(1+\beta))$"
folgt via **337-16**:

$R \subseteq S$.

□

350-6. Alle R, die **ana2** von ϕ, q, x sind werden zu einer eigenen Klasse zusammen gefasst.

350-6(Definition)

$$\texttt{350.1}(\phi, q, x) = \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}.$$

350-7. Da jede Klasse, die **ana2** von ϕ, q, x ist, eine Menge ist, ist das Erfüllt-Sein der definierenden Eigenschaft von 350.1(ϕ, q, x) notwendig und hinreichend für die Zugehörigkeit zu dieser Klasse.

350-7(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *R ist* **ana2** *von ϕ, q, x.*

`ii)` $R \in \{\omega : \omega$ *ist* **ana2** *von* $\phi, q, x\}$.

350.1(ϕ, q, x) $= \{\omega : \omega$ *ist* **ana2** *von* $\phi, q, x\}$

Beweis **350-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich R ist **ana2** von ϕ, q, x.

1: Aus VS gleich "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-4**: R Menge.

2: Aus VS gleich "R ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus 1 "R Menge"
folgt: $R \in \{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $R \in \{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\}$.
Aus VS gleich "$R \in \{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\}$"
folgt: R ist **ana2** von ϕ, q, x.

□

350-8. Die Klasse aller R, die **ana2** von ϕ, q, x sind, ist eine sse_Kette.

350-8(Satz)

a) *Aus "R, S ist* **ana2** *von ϕ, q, x" folgt "$(R \subseteq S) \vee (S \subseteq R)$".*

b) $\{\omega : \omega$ *ist* **ana2** *von* $\phi, q, x\}$ *ist* sse_*Kette.*

350.1$(\phi, q, x) = \{\omega : \omega$ *ist* **ana2** *von* $\phi, q, x\}$

<u>Beweis **350-8**</u> `a)` `VS` gleich R, S ist **ana2** von ϕ, q, x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$R\ldots$ ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots S$ ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S) \vee (\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$.

Aus `VS` gleich "R, S ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus `2.1.Fall`"$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$"
folgt via **350-5**: $R \subseteq S$.

`2.2.Fall` $\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R$.

Aus `VS` gleich "$\ldots S$ ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus `VS` gleich "$R\ldots$ ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus `2.2.Fall`"$\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-5**: $S \subseteq R$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(R \subseteq S) \vee (S \subseteq R)$.

`b)`

`Thema0` $\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\}$.

`1:` Aus `Thema0`"$\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\}$"
folgt: α, β ist **ana2** von ϕ, q, x.

`2:` Aus `1`"α, β ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\})$
$\Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Konsequenz via **337-20**: $\{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\}$ ist sse_Kette.

□

350-9. $\texttt{rf}2\phi qx$ ist die Vereinigung aller Mengen, die **ana2** von ϕ, q, x sind.

350-9(Definition)

$$\texttt{rf}2\phi qx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}.$$

$$\mathsf{350.1}(\phi, q, x) \ = \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$$

350-10. $\texttt{rf}2\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

350-10(Satz)

a) $\texttt{rf}2\phi qx$ *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

c) *Aus "R ist* **ana2** *von ϕ, q, x" folgt "$R \subseteq \texttt{rf}2\phi qx$".*

d) *Aus "R ist* **ana2** *von ϕ, q, x" und "$n \in \mathsf{dom}\, R$"*
folgt "$R(n) = \texttt{rf}2\phi qx(n)$".

e) $\texttt{rf}2\phi qx(0) = \{(0, q)\}$.

f) $\texttt{rf}2\phi qx$ *ist* **ana2** *von ϕ, q, x.*

Beweis **350-10**

$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu)$
$\wedge(\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$
$\mathsf{350.1}(\phi, q, x) = \{\omega : \omega$ ist **ana2** von $\phi, q, x\}$
RECH-**Notation**.

Beweis **350-10** a)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$.
2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$" folgt:	α ist **ana2** von ϕ, q, x.
3: Aus 2 "α ist **ana2** von ϕ, q, x" folgt via **350-3(Def)**:	α Funktion.

Ergo Thema1.1: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{"}\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})\text{"}}$

1.2: Via **350-8** gilt: $\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$ ist sse_Kette.

2: Aus 1.2 "$\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$ ist sse_Kette" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$"
folgt via **337-21**:
$\bigcup \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$ Funktion.

3: Via **350-9(Def)** gilt: $\texttt{rf2}\phi q x = \bigcup \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\texttt{rf2}\phi q x$ Funktion.

Beweis **350-10** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}.$
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$" folgt:	$\alpha \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x.$
`3:` Aus 2 "$\alpha \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x$" folgt via **350-3(Def)**:	$\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\})$
$\Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$"
folgt via **308-2**:

$$\mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$$

`2:` Aus `1.2` und
aus **350-9(Def)** "$\texttt{rf2}\phi q x = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$

`c)` `VS` gleich $R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x$"
folgt via **350-7**: $R \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}.$

`2:` Aus `1` "$R \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$"
folgt via **folk**: $R \subseteq \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}.$

`3:` Via **350-9(Def)** gilt: $\texttt{rf2}\phi q x = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}.$

`4:` Aus 2 und
aus 3
folgt: $R \subseteq \texttt{rf2}\phi q x.$

<u>Beweis **350-10**</u> `d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich " R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$ "
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $R \subseteq \mathtt{rf2}\phi qx$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich " $\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$ ",
aus `1.1`" $R \subseteq \mathtt{rf2}\phi qx$ " und
aus `1.2`" $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion "
folgt via **308-6**: $R(n) = \mathtt{rf2}\phi qx(n)$.

`e)`

`1:` Via **350-4** gilt: $\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0, q)\}$ Menge.

`3.1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**" 0 Menge" und
aus `2`" $\{(0, q)\}$ Menge "
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\}) = \{0\}$.

`3.2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**" 0 Menge" und
aus `2`" $\{(0, q)\}$ Menge "
folgt via **259-37**: $(\{(0, \{(0, q)\})\})(0) = \{(0, q)\}$.

`4:` Aus **1-5**" $0 \in \{0\}$" und
aus `3.1`
folgt: $0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\})$.

`5:` Aus `1`" $\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana2** von ϕ, q, x " und
aus `4`" $0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\})$ "
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(\{(0, \{(0, q)\})\})(0) = \mathtt{rf2}\phi qx(0)$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.2`
folgt: $\mathtt{rf2}\phi qx(0) = \{(0, q)\}$.

<u>Beweis **350-10**</u> `f)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

1: Via **350-9(Def)** gilt:
$$\mathtt{rf2}\phi q x = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}.$$

2: Aus Thema0 und
aus 1
folgt: $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\})$.

3: Via **350-8** gilt:
$$\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\} \text{ ist } \mathsf{sse}\text{\_Kette}.$$

4: Aus 2"$\alpha, 1+\alpha$
$\in \mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\})$" und
aus 3"$\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\}$ ist sse_Kette"
folgt via **337-24**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\})$
$\wedge(\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega)$.

5: Aus 4"$\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x\} \ldots$"
folgt: Ω ist **ana2** von ϕ, q, x.

6: Aus 5"Ω ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus 4"$\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$"
folgt via **350-3(Def)**: $\Omega(1+\alpha) = 350.0(\Omega(\alpha), \phi, x)$.

7: Aus 5"Ω ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus 4"$\ldots \alpha \ldots \in \mathsf{dom}\,\Omega$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\Omega(\alpha) = \mathtt{rf2}\phi q x(\alpha)$.

8.1: Aus 6 und
aus 7
folgt: $\Omega(1+\alpha) = 350.0(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha), \phi, x)$.

8.2: Aus 5"Ω ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus 4"$\ldots 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$\Omega(1+\alpha) = \mathtt{rf2}\phi q x(1+\alpha).$$

9: Aus 8.1 und
aus 8.2
folgt: $\mathtt{rf2}\phi q x(1+\alpha) = 350.0(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha), \phi, x)$.

...

<u>Beweis **350-10**</u> `f)` ...

Ergo `Thema0`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi q x(1+\alpha) = \mathsf{350.0}(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha), \phi, x)\,)$"

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{rf2}\phi q x$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathtt{rf2}\phi q x(0) = \{(0, q)\}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathtt{rf2}\phi q x$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `1.3`"$\mathtt{rf2}\phi q x(0) = \{(0, q)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi q x(1+\alpha) = \mathsf{350.0}(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha), x)\,)$"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathtt{rf2}\phi q x$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

□

350-11. Gelegentlich kann R, R ist **ana2** von ϕ, q, x, fortgesetzt werden.

350-11(Satz)

a) *Aus* "R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x"
und "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$"
und "$\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ *Menge*"
folgt "$\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\} \cup R$ *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x".

b) *Aus* "R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x"
und "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ *Menge*"
folgt "$\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\} \cup R$ *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x".

c) *Aus* "R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x"
und "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ *Menge*"
folgt "$1 + n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$".

$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu)$
$\wedge(\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$
$\mathsf{350.1}(\phi, q, x) = \{\omega : \omega$ *ist* **ana2** *von* $\phi, q, x\}$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **350-11**

$\leq$-**Notation**.

Beweis **350-11** ...

a) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(350.0(R(n), \phi, x) \text{ Menge}).$

1: Aus →) "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-3(Def)**:
$$(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\})$$
$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = 350.0(R(\alpha), \phi, x))).$$

2.1: Aus 1"R Funktion..." und
aus VS gleich "$\ldots 1 + n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **261-4**: $\{(1 + n, 350.0(R(n), \phi, x))\} \cup R$ Funktion.

2.2: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

2.3: Aus VS gleich "$\ldots 350.0(R(n), \phi, x)$ Menge"
folgt via **309-2**:
$$\mathsf{dom}\,(\{(1 + n, 350.0(R(n), \phi, x))\} \cup R) = \{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R.$$

2.4: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots 1 + n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **337-9**: $\mathsf{dom}\, R = 1 + n \in \mathbb{N}$.

3.1: Aus 2.4"$\ldots 1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via A$\mathbb{N}$**Axiom**: $1 + (1 + n) = \{1 + n\} \cup (1 + n)$.

3.2: Aus 2.4"$\ldots 1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + (1 + n) \in \mathbb{N}$.

4: Aus 3.1 und
aus 2.4"$\mathsf{dom}\, R = 1 + n \ldots$"
folgt: $1 + (1 + n) = \{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

5.1: Aus 4 und
aus 2.3
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(1 + n, 350.0(R(n), \phi, x))\} \cup R) = 1 + (1 + n)$.

5.2: Aus 4 und
aus 3.2
folgt: $\{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$.

...

<u>Beweis **350-11**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x) \text{ Menge})$.

...

`6:` Aus `5.2`"$\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`7:` Aus `6` und
aus `2.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\} \cup R) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`8:` Aus `2.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $0 \neq 1+n$.

`9:` Aus `8`"$0 \neq 1+n$"
folgt via **261-3**: $(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\} \cup R)(0) = R(0)$.

`10:` Aus `9` und
aus `1`"$\ldots R(0) = \{(0,q)\} \ldots$"
folgt: $(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\} \cup R)(0) = \{(0,q)\}$.

...

<u>Beweis **350-11**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x) \text{ Menge}).$

...

$\boxed{\texttt{Thema11}}$ $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R).$

`12:` Aus `Thema11` und
aus `5.1`
folgt: $\beta, 1+\beta \in 1+(1+n).$

`13.1:` Aus `12`"$\beta \ldots \in 1+(1+n)$" und
aus `3.2`"$1+(1+n) \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $\beta \in \mathbb{N}.$

`13.2:` Aus `2.4`"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$" und
aus `12`"$\ldots 1+\beta \in 1+(1+n)$"
folgt via **237-7**: $\mathbb{N} \ni 1+\beta \leq 1+n.$

`13.3:` Aus `2.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **239-5**: $n < 1+n.$

`14:` Aus `13.2`"$\ldots 1+\beta \leq 1+n$"
folgt via **160-10**: $\beta \leq n.$

`15:` Aus `14`"$\beta \leq n$" und
aus `13.3`"$n < 1+n$"
folgt via **folk**: $\beta < 1+n.$

`16:` Aus `15`"$\beta < 1+n$"
folgt via **41-3**: $\beta \neq 1+n.$

`17:` Aus `16`"$\beta \neq 1+n$"
folgt via **261-3**:
$$(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(\beta) = R(\beta).$$

`18:` Aus `14`"$\beta \leq n$"
folgt via **41-5**: $(\beta < n) \vee (\beta = n).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

Beweis **350-11** a)

VS gleich $(R \text{ ist } \textbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x) \text{ Menge}).$

...

`Thema11` $\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\} \cup R).$

...

`Fallunterscheidung`

`18.1.Fall` $\beta < n.$

19: Aus 13.1"$\beta \in \mathbb{N}$",
aus 2.2"$n \in \mathbb{N}$" und
aus 19.1.Fall"$\beta < n$"
folgt via **337-9**: $\beta, 1 + \beta \in 1 + n.$

20: Aus 19 und
aus 2.4"$\mathsf{dom}\, R = 1 + n \ldots$"
folgt: $\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R.$

21: Aus 20"$\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)$
$\Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, x)\,)$"
folgt: $R(1 + \beta) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \phi, x)\,.$

22: Aus 18.1.Fall"$\beta < n$"
folgt via **160-11**: $1 + \beta < 1 + n.$

23: Aus 22"$1 + \beta < 1 + n$"
folgt via **41-3**: $1 + \beta \neq 1 + n.$

24: Aus 23"$1 + \beta \neq 1 + n$"
folgt via **261-3**:
$$(\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\} \cup R)(1 + \beta) = R(1 + \beta).$$

25: Aus 24 und
aus 21
folgt: $$(\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\}\} \cup R)(1 + \beta) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \phi, x)\,.$$

26: Aus 25 und
aus 17
folgt: $$(\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\}\} \cup R)(1 + \beta) = \mathsf{350.0}((\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)\,)\}\} \cup R)(\beta), x)\,.$$

...

...

Beweis **350-11** a)

VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x) \text{ Menge})$.

...

`Thema11` $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`18.2.Fall` $\beta = n$.

19: Aus 2.4"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+n$ Menge.

20: Aus VS gleich "$\ldots 1+n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus 19"$1+n$ Menge" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ Menge"
folgt via **261-3**:
$$(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(1+n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x).$$

21: Aus 20 und
aus 18.2.Fall"$\beta = n$"
folgt: $$(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(1+\beta) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \phi, x).$$

22: Aus 21 und
aus 17
folgt: $$(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\}\} \cup R)(1+\beta) = \mathsf{350.0}((\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\}\} \cup R)(\beta), x).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(1+\beta) = \mathsf{350.0}((\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\}\} \cup R)(\beta), \phi, x).$$

Ergo `Thema11`:

A1 | "$\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)) \Rightarrow ((\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(1+\beta) = \mathsf{350.0}((\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(\beta), x))$"

<u>Beweis **350-11**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x) \text{ Menge}).$

...

`12:` Aus `2.1` "$\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R$ Funktion",
aus `7` "$\mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `10` "$(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(0) = \{(0, q)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R))$
$\Rightarrow ((\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(1+\beta)$
$= \mathsf{350.0}((\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R)(\beta), \phi, x))$"
folgt via **350-3(Def)**:
$\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x.$

Beweis **350-11** `b)`
`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x) \text{ Menge})$.

`1:` Es gilt: $(1 + n \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-3(Def)**: R Funktion.

`2.2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1 + n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$.

`3.1:` Aus `2.1` "R Funktion"
folgt via **337-26**: $\{(1 + n, R(1 + n))\} \cup R = R$.

`3.2:` Aus `2.2` "$R(1 + n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$"
folgt via **PaarAxiom I**:
$(1 + n, R(1 + n)) = (1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R = R$.

`5:` Aus `4` und
aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt: $\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`1.2.Fall` $1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$.

Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus vs. . . $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ Menge und
aus `1.2.Fall` "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\{(1 + n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

Beweis **350-11** `c)`
`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x) \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich " R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$ "
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich " R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$ ",
aus `VS` gleich " $\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$ " und
aus `VS` gleich " $\ldots \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`1.3:` Aus `VS` gleich " $\ldots \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ Menge"
folgt via **309-2**:
$\mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R) = \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich " $\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$ " und
aus `1.1` " $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ "
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1.2` " $\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R$ ist **ana2** von ϕ, q, x "
folgt via **350-10**:
$\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R \subseteq \mathtt{rf2}\phi q x$.

`3.1:` Aus `2.2` " $\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R \subseteq \mathtt{rf2}\phi q x$ "
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x))\} \cup R) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

`3.2:` Aus `2.1` " $n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **folk**: $1+n \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `1.3` und
aus `3.1`
folgt: $\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

`4.2:` Aus `3.2` " $1+n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **ElementAxiom**: $1+n$ Menge.

`5:` Aus `4.2` " $1+n$ Menge"
folgt via **folk**: $1+n \in \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

`6:` Aus `5` " $1+n \in \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$ " und
aus `4.1` " $\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$ "
folgt via **0-4**: $1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

$\square$

350-12. Die mögliche Eigenschaft von $\mathsf{350.0}(R(n),\phi,x)$, eine Menge zu sein, hat entsprechend **350-11** interessante Konsequenzen. Aber wann ist $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ eine Menge?

350-12(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{dom}\,z)_{\mathrm{sngltn}}.$

b) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq \mathsf{ran}\,y.$

c) *Aus* "$\mathsf{dom}\,x, \mathsf{dom}\,z, \mathsf{ran}\,y$ *Menge*" *folgt* "$\mathsf{350.0}(x,z,y)$ *Menge*".

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu)$$
$$\wedge(\exists\Omega,\Xi : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

<u>Beweis **350-12**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,).$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\alpha, \Gamma) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)\,.$

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Gamma) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$"
folgt via **350-2**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Xi : ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \wedge (\alpha = \{\Phi\} \cup \Psi).$$

`4.1:` Aus `3` "$\ldots (\Psi, \Omega) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: $\Psi \in \mathsf{dom}\, x.$

`4.2:` Aus `3` "$\ldots (\Phi, \Xi) \in z \ldots$"
folgt via **folk**: $\Phi \in \mathsf{dom}\, z.$

`5:` Aus `4.2` "$\Phi \in \mathsf{dom}\, z$"
folgt via **27-3**: $\{\Phi\} \in (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}.$

`6:` Aus `5` "$\{\Phi\} \in (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}$" und
aus `4.1` "$\Psi \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **220-6**:
$$\{\Psi\} \cup \Phi \in (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}} \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathsf{dom}\, x.$$

`7:` Aus `3` "$\ldots \alpha = \{\Phi\} \cup \Psi$" und
aus `6`
folgt: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}} \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathsf{dom}\, x.$

`8:` Via **220-7** gilt:
$$(\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}} \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathsf{dom}\, x = (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}.$$

`9:` Aus `7` und
aus `8`
folgt: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}.$

Ergo `Thema1`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}.$$

Beweis **350-12** b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$.
2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$" folgt via **folk**:	$\exists \Gamma : (\Gamma, \alpha) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$.
3: Aus 2 "$\ldots (\Gamma, \alpha) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$" folgt via **350-2**:	$\exists \Omega, \Xi : ((\Omega, \Xi), \alpha) \in y$.
4: Aus 3 "$((\Omega, \Xi), \alpha) \in y$" folgt via **folk**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\, y$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

c) VS gleich $\mathsf{dom}\, x, \mathsf{dom}\, z, \mathsf{ran}\, y$ Menge.

1.1: Via **350-2** gilt: $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ Relation.

1.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt:
$\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\, x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}$.

1.3: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

1.4: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, z \ldots$ Menge"
folgt via **27-12**: $(\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}$ Menge.

2.1: Aus 1.3 "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq \mathsf{ran}\, y$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, y$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$ Menge.

2.2: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, x \ldots$ Menge" und
aus 1.4 "$(\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}$ Menge"
folgt via **337-28**: $(\mathsf{dom}\, x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}$ Menge.

3: Aus 1.2 "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\, x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}$" und
aus 2.2 "$(\mathsf{dom}\, x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{dom}\, z)_{\mathrm{sngltn}}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$ Menge.

4: Aus 1.1 "$\mathsf{350.0}(x,z,y)$ Relation",
aus 4 "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$ Menge" und
aus 2.1 "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$ Menge"
folgt via **10-5**: $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ Menge.

□

350-13. Der Definitions-Bereich von $\mathtt{rf2}\phi qx$ ist höchstens= $\mathbb{N}$. Er ist= $\mathbb{N}$, wenn $\mathsf{dom}\,\phi, \mathsf{ran}\,x$ Mengen sind.

350-13(Satz)

Aus "$\mathsf{dom}\,\phi, \mathsf{ran}\,x$ *Menge*" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}$".

Beweis **350-13** VS gleich $\mathsf{dom}\,\phi, \mathsf{ran}\,x$ Menge.

$$350.0(x,z,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu,\Omega)\in x) \wedge ((\lambda,\Xi)\in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

RECH-**Notation**.

1: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx(0) = \{(0,q)\}$.

2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0,q)\}$ Menge.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathtt{rf1}qx(0)$ Menge.

4: Aus 3 "$\mathtt{rf2}\phi qx(0)$ Menge"
folgt via **folk**: $0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$.

...

Beweis **350-13** . . .

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

`6.1`: Aus `Thema5` "$\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

`6.2`: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi x$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`7`: Aus `6.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$"
folgt via **folk**: $\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha)$ Menge.

`8`: Aus `7` "$\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha)$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha))$ Menge.

`9`: Aus `8` "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha))$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\phi, \mathsf{ran}\,x$ Menge"
folgt via **350-12**: $\mathsf{350.0}(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha), \phi, x)$ Menge.

`10`: Aus `6.2` "$\mathtt{rf2}\phi q x$ ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus `6.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$" und
aus `9` "$\mathsf{350.0}(\mathtt{rf2}\phi q x(\alpha), \phi, x)$ Menge"
folgt via **350-11**: $1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

Ergo `Thema5`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x))$"

`6`: Aus `4` "$0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x))$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$.

`7`: Via **350-10** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`8`: Aus `6` "$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}\phi q x)$" und
aus `7` "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **308-6**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x) = \mathbb{N}$.

□

Mengenlehre: Ergänzungen zu (strenger) Isotonie/Antitonie.

Ersterstellung: 03/07/15 **Letzte Änderung: 03/07/15**

351-1. Bei der Überarbeitung vergangener Essays kommt es immer wieder vor, nahe liegende Resultate, die bislang noch nicht den Weg in das LW gefunden haben, zu erblicken. Dann enstehen “Zwischen-Essays” wie der Vorliegende.

351-1(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonright E) \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

b) $\mathsf{ran}\,(x \downharpoonright E) \subseteq \mathsf{ran}\,x$.

c) $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonright E) \subseteq E$.

d) *“$(x \downharpoonright E)$ injektiv” genau dann, wenn “$(x \downharpoonright E)$ injektiv auf E”.*

e) $(x \downharpoonright E)\,[D] = x[E \cap D]$.

f) $(x \downharpoonright E)\,[E] = x[E]$.

Beweis **351-1** ab)

1: Via **261-1** gilt: $(x \downharpoonright E) \subseteq x$.

2.a): Aus 1“$(x \downharpoonright E) \subseteq x$”
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonright E) \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

2.b): Aus 1“$(x \downharpoonright E) \subseteq x$”
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\,(x \downharpoonright E) \subseteq \mathsf{ran}\,x$.

c)

1: Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonright E) = E \cap \mathsf{dom}\,x$.

2: Via **folk** gilt: $E \cap \mathsf{dom}\,x \subseteq E$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonright E) \subseteq E$.

<u>Beweis **351-1**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x \downharpoonleft E)$ injektiv.

Aus `VS` gleich "$(x \downharpoonleft E)$ injektiv"
folgt via **299-2**: $(x \downharpoonleft E)$ injektiv auf E.

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(x \downharpoonleft E)$ injektiv auf E.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E) \subseteq E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(x \downharpoonleft E)$ injektiv auf E" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E) \subseteq E$"
folgt via **299-2**: $(x \downharpoonleft E)$ injektiv.

`e)`

`1:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1`"$(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E"
folgt via **15-10**: $(x \downharpoonleft E)\,[D] = x[E \cap D]$.

`f)`

$$(x \downharpoonleft E)\,[E] \stackrel{\texttt{e)}}{=} x[E \cap E] \stackrel{\textbf{folk}}{=} x[E].$$

$\square$

351-2. Eine Klasse x ist trivialer Weise M_isoton auf E, wenn $E \cap \mathsf{dom}\, M = 0$ oder $E \cap \mathsf{ran}\, M = 0$.

351-2(Satz)

a) *Aus* "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$E \cap \mathsf{dom}\, M = 0$"
folgt "x ist M_isoton auf E"
und "x ist M_antiton auf E"
und "x streng M_isoton auf M"
und "x streng M_antiton auf E".

b) *Aus* "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$E \cap \mathsf{ran}\, M = 0$"
folgt "x ist M_isoton auf E"
und "x ist M_antiton auf E"
und "x streng M_isoton auf M"
und "x streng M_antiton auf E".

Beweis **351-2** a) VS gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \cap \mathsf{dom}\, M = 0)$.

Thema1.1 $(\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)$

2: Aus Thema1.1"$\alpha\_M\_\beta \ldots$"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus Thema1.1"$\ldots \alpha \ldots \in E \ldots$" und
aus 2"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **folk**: $\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3 und
aus VS gleich "$\ldots E \cap \mathsf{dom}\, M = 0$"
folgt: $\alpha \in 0$.

5: Via **folk** gilt: $\alpha \notin 0$.

Ergo Thema1.1:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

...

<u>Beweis **351-2**</u> `a)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \cap \mathsf{dom}\, M = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha\_M\_\beta \ldots$"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha \ldots \in E \ldots$" und
aus `2`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **folk**: $\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, M$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cap \mathsf{dom}\, M = 0$"
folgt: $\alpha \in 0$.

`5:` Via **folk** gilt: $\alpha \notin 0$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"

...

<u>Beweis **351-2**</u> `a)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \cap \mathsf{dom}\, M = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $(\alpha_{-} \overset{\textbf{ir}}{M}\, {}_{-}\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)$

`2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha_{-} \overset{\textbf{ir}}{M}\, {}_{-}\beta \ldots$"
folgt via **41-6**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `Thema1.3`"$\ldots \alpha \ldots \in E \ldots$" und
aus 2"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **folk**: $\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, M$.

`4:` Aus 3 und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cap \mathsf{dom}\, M = 0$"
folgt: $\alpha \in 0$.

`5:` Via **folk** gilt: $\alpha \notin 0$.

Ergo `Thema1.3`:

`A3` "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha_{-} \overset{\textbf{ir}}{M}\, {}_{-}\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\gamma_{-} \overset{\textbf{ir}}{M}\, {}_{-}\delta)$"

...

Beweis **351-2** `a)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \cap \mathsf{dom}\, M = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$ $(\alpha_-\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_-\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)$

`2:` Aus `Thema1.4`"$\alpha_-\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_-\beta \ldots$"
folgt via **41-6**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Aus `Thema1.4`"$\ldots \alpha \ldots \in E \ldots$" und
aus 2"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **folk**: $\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, M$.

`4:` Aus 3 und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cap \mathsf{dom}\, M = 0$"
folgt: $\alpha \in 0$.

`5:` Via **folk** gilt: $\alpha \notin 0$.

Ergo `Thema1.4`:

`A4` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha_-\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_-\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\delta_-\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_-\gamma)$"

...

Beweis **351-2** a) VS gleich "Å" §$(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \cap \mathsf{dom}\, M = 0)$

...

2.1: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

folgt via **81-2**: x ist M_isoton auf E

2.2: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"

folgt via **81-3**: x ist M_antiton auf E

2.3: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus A3 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta)$"

folgt via **81-2**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf E.

2.4: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus A4 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\delta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma)$"

folgt via **81-3**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf E.

3.1: Aus 2.1"x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf E"

folgt via **320-3(Def)**: x streng M_isoton auf E

3.2: Aus 2.2"x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf E"

folgt via **320-3(Def)**: x streng M_antiton auf E

<u>Beweis **351-2**</u> `b)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \cap \mathsf{ran}\, M = 0)$.

`1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\, M = \mathsf{dom}\, (M^{-1})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \cap \mathsf{ran}\, M = 0$" und aus `1` folgt: $E \cap \mathsf{dom}\, (M^{-1}) = 0$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und aus `2`"$E \cap \mathsf{dom}\, (M^{-1}) = 0$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x ist M^{-1}_isoton auf E.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und aus `2`"$E \cap \mathsf{dom}\, (M^{-1}) = 0$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x ist M^{-1}_antiton auf E.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und aus `2`"$E \cap \mathsf{dom}\, (M^{-1}) = 0$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x streng M^{-1}_isoton auf E.

`3.4:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und aus `2`"$E \cap \mathsf{dom}\, (M^{-1}) = 0$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x streng M^{-1}_isoton auf E.

`4.1:` Aus `3.1`"x ist M^{-1}_isoton auf E" folgt via **320-8**: $\boxed{x \text{ ist } M\text{\_isoton auf } E}$

`4.2:` Aus `3.2`"x ist M^{-1}_antiton auf E" folgt via **320-8**: $\boxed{x \text{ ist } M\text{\_antiton auf } E}$

`4.3:` Aus `3.3`"x streng M^{-1}_isoton auf E" folgt via **320-8**: $\boxed{x \text{ streng } M\text{\_isoton auf } E}$

`4.4:` Aus `3.4`"x streng M^{-1}_antiton auf E" folgt via **320-8**: $\boxed{x \text{ streng } M\text{\_antiton auf } E}$

□

351-3. Wenig überraschend ist x genau dann M_isoton auf E, wenn $(x \restriction E)$ auf E M_isoton ist.

351-3(Satz)

a) *"x ist M_isoton auf E"*
genau dann, wenn "$(x \restriction E)$ ist M_isoton auf E".

b) *"x ist M_antiton auf E"*
genau dann, wenn "$(x \restriction E)$ ist M_antiton auf E".

c) *"x streng M_isoton auf E"*
genau dann, wenn "$(x \restriction E)$ streng M_isoton auf E".

d) *"x streng M_antiton auf E"*
genau dann, wenn "$(x \restriction E)$ streng M_antiton auf E".

Beweis **351-3** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich x ist M_isoton auf E.

1: Aus VS gleich "x ist M_isoton auf E"
folgt via **323-7**: $(x \restriction E)$ ist M_isoton auf $E \cap E$.

2: Via **folk** gilt: $E \cap E = E$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $(x \restriction E)$ ist M_isoton auf E.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x \restriction E)$ ist M_isoton auf E.

1: Aus VS gleich "$(x \restriction E)$ ist M_isoton auf E"
folgt via **81-2**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,(x \restriction E)$.

2: Via **351-1** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \restriction E) \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

3: Aus 1"$E \subseteq \mathsf{dom}\,(x \restriction E)$" und
aus 2"$\mathsf{dom}\,(x \restriction E) \subseteq \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **folk**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

...

<u>Beweis **351-3**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x \downharpoonleft E)$ ist M_isoton auf E.

. . .

$\boxed{\texttt{Thema4}}$ $(\alpha, \beta \in E) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)$.

`5.1:` Aus `Thema4`"$\alpha \ldots \in E \ldots$" und
aus `Thema4`"$\ldots (\alpha, \gamma) \ldots \in x$"
folgt via **299-5**: $(\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)$.

`5.2:` Aus `Thema4`"$\ldots \beta \in E \ldots$" und
aus `Thema4`"$\ldots (\beta, \delta) \in x$"
folgt via **299-5**: $(\beta, \delta) \in (x \downharpoonleft E)$.

`6:` Aus `VS` gleich "$(x \downharpoonleft E)$ ist M_isoton auf E",
aus `Thema4`"$(\alpha, \beta \in E) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \ldots$",
aus `5.1`"$(\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)$" und
aus `5.2`"$(\beta, \delta) \in (x \downharpoonleft E)$"
folgt via **81-2**: γ_M_δ.

Ergo `Thema4`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

`5:` Aus `3`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **81-2**: x ist M_isoton auf E.

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich x ist M_antiton auf E.

`1:` Aus `VS` gleich "x ist M_antiton auf E"
folgt via **323-7**: $(x \downharpoonleft E)$ ist M_antiton auf $E \cap E$.

`2:` Via **folk** gilt: $E \cap E = E$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(x \downharpoonleft E)$ ist M_antiton auf E.

Beweis **351-3** b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $(x \downharpoonleft E)$ ist M_antiton auf E.

1: Aus VS gleich "$(x \downharpoonleft E)$ ist M_antiton auf E"
folgt via **81-3**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E)$.

2: Via **351-1** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E) \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus 1"$E \subseteq \mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E)$" und
aus 2"$\mathsf{dom}\,(x \downharpoonleft E) \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\text{Thema4}}$ $(\alpha, \beta \in E) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)$.
5.1: Aus Thema4"$\alpha \ldots \in E \ldots$" und aus Thema4"$\ldots (\alpha, \gamma) \ldots \in x$" folgt via **299-5**: $(\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)$.
5.2: Aus Thema4"$\ldots \beta \in E \ldots$" und aus Thema4"$\ldots (\beta, \delta) \in x$" folgt via **299-5**: $(\beta, \delta) \in (x \downharpoonleft E)$.
6: Aus VS gleich "$(x \downharpoonleft E)$ ist M_antiton auf E", aus Thema4"$(\alpha, \beta \in E) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \ldots$", aus 5.1"$(\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)$" und aus 5.2"$(\beta, \delta) \in (x \downharpoonleft E)$" folgt via **81-3**: δ_M_γ.

Ergo Thema4:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"

5: Aus 3"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha, \beta \in E) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in x))$
$\Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"
folgt via **81-3**: x ist M_antiton auf E.

<u>Beweis **351-3**</u> `c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:

$$(x \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-isoton auf } E) \Leftrightarrow ((x \downharpoonleft E) \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-isoton auf } E).$$

`1.2:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$(x \text{ streng } M\text{-isoton auf } E) \Leftrightarrow (x \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-isoton auf } E).$$

`1.3:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$((x \downharpoonleft E) \text{ streng } M\text{-isoton auf } E) \Leftrightarrow ((x \downharpoonleft E) \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-isoton auf } E).$$

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $(x \text{ streng } M\text{-isoton auf } E) \Leftrightarrow ((x \downharpoonleft E) \text{ streng } M\text{-isoton auf } E)$.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:

$$(x \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-antiton auf } E) \Leftrightarrow ((x \downharpoonleft E) \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-antiton auf } E).$$

`1.2:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$(x \text{ streng } M\text{-antiton auf } E) \Leftrightarrow (x \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-antiton auf } E).$$

`1.3:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$((x \downharpoonleft E) \text{ streng } M\text{-antiton auf } E) \Leftrightarrow ((x \downharpoonleft E) \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M} \text{-antiton auf } E).$$

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $(x \text{ streng } M\text{-antiton auf } E) \Leftrightarrow ((x \downharpoonleft E) \text{ streng } M\text{-antiton auf } E)$.

$\square$

351-4. 320-18,19 können etwas griffiger formuliert werden. In `c)` wird eine gemeinsame Idee von `ab)` notiert.

351-4(Satz)

`a)` *Aus "f Funktion"*
und "f streng M_isoton auf K"
und "K ist M_Kette" *folgt "f injektiv auf K".*

`b)` *Aus "f Funktion"*
und "f streng M_antiton auf K"
und "K ist M_Kette" *folgt "f injektiv auf K".*

`c)` *Aus "f Funktion"*
und "$\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_-\beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta))$"
und "K ist M_Kette" *folgt "f injektiv auf K".*

Beweis **351-4** `a)`
`VS` gleich $(f$ Funktion$) \wedge (f$ streng M_isoton auf $K) \wedge (K$ ist M_Kette$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(f$ Funktion$) \wedge (f$ streng M_isoton auf $K) \ldots$"
folgt via **320-9**: $K \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(f$ Funktion$) \wedge (f$ streng M_isoton auf $K) \ldots$"
folgt via **320-9**:

$$\forall\alpha,\beta, : ((\alpha,\beta \in K) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_-\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- f(\beta)).$$

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `1.1`"$K \subseteq \mathsf{dom}\, f$",
aus `VS` gleich "…K ist M_Kette" und
aus `1.2`"$\forall\alpha,\beta, : ((\alpha,\beta \in K) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_-\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- f(\beta))$"
folgt via **320-18**: f injektiv auf K.

<u>Beweis</u> **351-4** `b)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ streng } M\text{\_antiton auf } K) \wedge (K \text{ ist } M\text{\_Kette})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(f$ Funktion$) \wedge (f$ streng M_antiton auf $K) \dots$"
folgt via **320-10**: $K \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(f$ Funktion$) \wedge (f$ streng M_antiton auf $K) \dots$"
folgt via **320-10**:

$$\forall \alpha, \beta, : ((\alpha, \beta \in K) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\beta)) \Rightarrow (f(\beta)\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_f(\alpha)).$$

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." ,
aus `1.1`"$K \subseteq \mathsf{dom}\, f$" ,
aus `VS` gleich "$\dots K$ ist M_Kette" und
aus `1.2`"$\forall \alpha, \beta, : ((\alpha, \beta \in K) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\beta)) \Rightarrow (f(\beta)\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_f(\alpha))$"
folgt via **320-19**: f injektiv auf K.

<u>Beweis **351-4**</u> `c)` `VS` gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta)))$$
$$\wedge (K \text{ ist } M\text{\_Kette}).$$

`Thema1` $(\gamma, \delta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

2: Aus `VS` gleich "$\dots K$ ist M_Kette" und
aus `Thema1`"$\gamma, \delta \in K$"
folgt via **41-9**: $(\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta) \vee (\gamma = \delta) \vee (\delta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma)$.

3: Aus 2 und
aus `Thema1`"$\dots \gamma \neq \delta$"
folgt: $(\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta) \vee (\delta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$.

Aus `Thema1`"$\gamma, \delta \in K \cap \mathsf{dom}\, f \dots$",
aus `3.1.Fall`"$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$" und
aus `VS` gleich "$\dots \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta))$
$\Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta)) \dots$"
folgt: $f(\gamma) \neq f(\delta)$.

`3.2.Fall` $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$.

4: `Thema1`"$\dots \delta \in K \cap \mathsf{dom}\, f \dots$",
aus `Thema1`"$\gamma \dots \in K \cap \mathsf{dom}\, f \dots$",
aus `3.2.Fall`"$\delta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$" und
aus `VS` gleich "$\dots \forall \alpha, \beta :$
$((\alpha, \beta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta))$
$\Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta)) \dots$"
folgt: $f(\delta) \neq f(\gamma)$.

5: Aus 4
folgt: $f(\gamma) \neq f(\delta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$f(\gamma) \neq f(\delta)$.

...

<u>Beweis **351-4**</u> `c)` `VS` gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}\, _-\beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta)))$$
$$\wedge (K \text{ ist } M\text{\_Kette}).$$

...

Ergo `Thema1`: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“}\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow (f(\gamma) \neq f(\delta))\text{”}}$

`2:` Aus `VS` gleich “f Funktion. . . ” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in K \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow (f(\gamma) \neq f(\delta))$”
folgt via **317-5**: f injektiv auf K.

□

351-5. 322-4 kann re-formuliert werden.

<u>**351-5(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) *f Funktion.*

→) *f streng M_isoton auf K.*

→) *K ist M_Kette.*

→) *M antiSymmetrisch.*

Dann folgt “$(f \restriction K)^{-1}$ streng M_isoton auf $f[K]$”.

<u>Beweis **351-5**</u>

1.1: Aus →) “f streng M_isoton auf K”
folgt via **351-3**: $(f \restriction K)$ streng M_isoton auf K.

1.2: Aus →) “f Funktion”
folgt via **258-11**: $(f \restriction K)$ Funktion.

2: Aus 1.2 “$(f \restriction K)$ Funktion”,
aus 1.1 “$(f \restriction K)$ streng M_isoton auf K” und
aus →) “K ist M_Kette”
folgt via **351-4**: $(f \restriction K)$ injektiv auf K.

3: Aus 2 “$(f \restriction K)$ injektiv auf K”
folgt via **351-1**: $(f \restriction K)$ injektiv.

4: Aus 1.2 “$(f \restriction K)$ Funktion”,
aus 3 “$(f \restriction K)$ injektiv”,
aus aus 1.1 “$(f \restriction K)$ streng M_isoton auf K”,
aus →) “K ist M_Kette” und
aus →) “M antiSymmetrisch”
folgt via **322-4**: $(f \restriction K)^{-1}$ streng M_isoton auf $(f \restriction K)[K]$.

5: Via **351-1** gilt: $(f \restriction K)[K] = f[K]$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $(f \restriction K)^{-1}$ streng M_isoton auf $f[K]$.

□

351-6. 322-5 kann re-formuliert werden.

351-6(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

$\rightarrow\!)$ *f streng M_antiton auf K.*

$\rightarrow\!)$ *K ist M_Kette.*

$\rightarrow\!)$ *M antiSymmetrisch.*

Dann folgt "$(f \restriction K)^{-1}$ streng M_antiton auf $f[K]$".

Beweis **351-6**

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ "f streng M_antiton auf K"
folgt via **351-3**: $(f \restriction K)$ streng M_antiton auf K.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion"
folgt via **258-11**: $(f \restriction K)$ Funktion.

2: Aus 1.2 "$(f \restriction K)$ Funktion",
aus 1.1 "$(f \restriction K)$ streng M_antiton auf K" und
aus $\rightarrow\!)$ "K ist M_Kette"
folgt via **351-4**: $(f \restriction K)$ injektiv auf K.

3: Aus 2 "$(f \restriction K)$ injektiv auf K"
folgt via **351-1**: $(f \restriction K)$ injektiv.

4: Aus 1.2 "$(f \restriction K)$ Funktion",
aus 3 "$(f \restriction K)$ injektiv",
aus aus 1.1 "$(f \restriction K)$ streng M_antiton auf K",
aus $\rightarrow\!)$ "K ist M_Kette" und
aus $\rightarrow\!)$ "M antiSymmetrisch"
folgt via **322-5**: $(f \restriction K)^{-1}$ streng M_antiton auf $(f \restriction K)[K]$.

5: Via **351-1** gilt: $(f \restriction K)[K] = f[K]$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $(f \restriction K)^{-1}$ streng M_antiton auf $f[K]$.

□

Analysis: R ist **ana2** von ϕ, q, x und $n \in \mathsf{dom}\, R$:
$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.
Erste Funktions-Eigenschaften von $R(n)$.

Ersterstellung: 03/07/15 **Letzte Änderung: 07/07/15**

352-1. Die Untersuchung von Klassen, die **ana2** von ϕ, q, x sind orientiert sich an der Vorgehensweise bei den Klassen, die **ana1** von q, x sind. Zunächst soll **338-7** adaptiert werden.

352-1(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist* **ana2** *von ϕ, q, x.*

$\rightarrow$) $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

Dann folgt "$\mathsf{dom}\,(R(1+n)) \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$".

RECH.-**Notation**

Beweis **352-1**

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu)$$
$$\wedge(\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

1: Aus $\rightarrow$) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **338-6**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

2: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von q, x",
aus 1 "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus $\rightarrow$) "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1+n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$.

...

Beweis **352-1** ...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(R(1+n))$.

`4:` Aus `Thema3` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(R(1+n))$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in R(1+n)$.

`5:` Aus `4` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in R(1+n)$" und
aus `2`
folgt: $(\alpha, \Omega) \in \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$.

`6:` Aus `5` "$(\alpha, \Omega) \in \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$"
folgt via **350-2**: $\exists \Gamma, \Phi, \Psi, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Gamma) \in R(n))$
$\wedge((\Phi, \Xi) \in \phi) \wedge (((\Gamma, \Xi), \Omega) \in x) \wedge (\alpha = \{\Phi\} \cup \Psi)$.

`7.1:` Aus `6` "$\ldots (\Psi, \Gamma) \in R(n) \ldots$"
folgt via **folk**: $\Psi \in \mathsf{dom}\,(R(n))$.

`7.2:` Aus `6` "$\ldots (\Phi, \Xi) \in z \ldots$"
folgt via **folk**: Φ Menge.

`8:` Aus `7.1` "$\Psi \in \mathsf{dom}\,(R(n))$" und
aus →) "$R(n) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **0-4**: $\Psi \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`9:` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$",
aus `6` "$\ldots \Phi \notin \Psi \ldots$",
aus "$\Psi \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `7.2` "Φ Menge"
folgt via **300-6**: $\{\Phi\} \cup \Psi \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`10:` Aus `9` und
aus `6` "$\ldots \alpha = \{\Phi\} \cup \Psi$"
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$

Ergo `Thema3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(R(1+n))) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(R(1+n)) \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

□

352-2. Ist R **ana2** von ϕ, q, x, so gilt $R(n) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ für $n \in \mathsf{dom}\, R$.

352-2(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist* **ana2** *von ϕ, q, x.*

$\rightarrow$) *$n \in \mathsf{dom}\, R$.*

Dann folgt "$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **352-2**

$$338.0(x, y) = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\mathsf{dom}\,(y(\omega)) \subseteq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}.$$

...

Beweis **352-2** ...

1: Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2: Aus →) "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

3: Aus 2"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

4.1: Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

4.2: Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

5: Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \{0\}$.

6: $$\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0} \stackrel{\textbf{+schola}}{=} \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1} \stackrel{\textbf{296-10(Def)}}{=} \mathcal{U}_0 \setminus 0 \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}_0.$$

7: Aus 5 und
aus 6"$\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0} = \ldots = \{0\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

8: Aus 7 und
aus 4.1
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

9: Aus 4.2"$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 8"$\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$"
folgt via **338-4**: $0 \in 338.0(\mathsf{dom}\, R, R)$.

...

Beweis **352-2** ...

$\boxed{\texttt{Thema10}}$ $(\alpha \in \mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\, R, R)\,) \wedge (1+\alpha \in 1+n)$.

11: Aus Thema10 "$\alpha \in \mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\, R, R)\ \ldots$"
folgt **p.def.**: $(\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$.

12: Aus 11 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

13: Aus Thema10 "$\ldots 1+\alpha \in 1+n$",
aus 3 "$1+n \in \mathbb{N}$" und
aus 12 "$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **338-11**: $\alpha \in n \in \mathbb{N}$.

14: Aus 13 "$\alpha \in n \ldots$",
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-9**: $1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

15: Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus 12 "$\alpha \in \mathbb{N}$",
aus 14 "$1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 11 "$\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}$"
folgt via **352-1**: $\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_\alpha$.

16: Aus 12 "$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-4**: $-1+(1+\alpha) = \alpha$.

19: Aus 15 und
aus 16
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}$.

20: Aus 14 "$1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 19 "$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}$"
folgt via **338-4**: $1+\alpha \in \mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\, R, R)$.

Ergo Thema10:

A1 | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\, R, R)\,) \wedge (1+\alpha \in 1+n)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\, R, R)\,)$"

...

<u>Beweis **352-2**</u> . . .

11: Aus 3"$1+n\in\mathbb{N}$",
aus 9"$0\in 338.0(\mathrm{dom}\,R,R)$" und
aus A1 gleich "$\forall\alpha:((\alpha\in 338.0(\mathrm{dom}\,R,R))\wedge(1+\alpha\in 1+n))$
$\Rightarrow(1+\alpha\in 338.0(\mathrm{dom}\,R,R))$"
folgt via **337-12**: $1+n\subseteq 338.0(\mathrm{dom}\,R,R)$.

12: Aus 2"$n\in\mathbb{N}$"
folgt via **239-5**: $n\in 1+n$.

13: Aus 12"$n\in 1+n$" und
aus 11"$1+n\subseteq 338.0(\mathrm{dom}\,R,R)$"
folgt via **0-4**: $n\in 338.0(\mathrm{dom}\,R,R)$.

14: Aus 13"$n\in 338.0(\mathrm{dom}\,R,R)$"
folgt **p.def.**: $\mathrm{dom}\,(R(n))\subseteq\mathcal{U}_n\setminus\mathcal{U}_{-1+n}$.

□

352-3. Ist R **ana2** von ϕ, q, x, so sind die Definitions-Bereiche von R paarweise disjunkt.

352-3(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x.

$\rightarrow)$ $n, m \in \mathsf{dom}\, R$.

$\rightarrow)$ $n \neq m$.

Dann folgt "$(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) = 0$".

Beweis **352-3**

`RECH`-**Notation**.

...

Beweis **352-3** . . .

1: Aus →) “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ”
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2: Aus →) “ $n, m \in \mathsf{dom}\, R$ ” und
aus 1 “ $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ”
folgt via **338-8**: $n, m \in \mathbb{N}$.

3: Aus 2 “ $n, m \in \mathbb{N}$ ” und
aus →) “ $n \neq m$ ”
folgt via **338-2**: $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

4.1: Aus →) “ R ist **ana1** von q, x ” und
aus →) “ $n \ldots \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **352-2**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

4.2: Aus →) “ R ist **ana1** von q, x ” und
aus →) “ $\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **352-2**: $\mathsf{dom}\,(R(m)) \subseteq \mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}$.

5: Aus 4.1 “ $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ” und
aus 4.2 “ $\mathsf{dom}\,(R(m)) \subseteq \mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}$ ”
folgt via **2-13**:
$$(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) \subseteq (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}).$$

6: Aus 5 und
aus 3
folgt: $(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) \subseteq 0$.

7: Aus 6 “ $(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) \subseteq 0$ ”
folgt via **folk**: $(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) = 0$.

□

352-4. Handelt es sich bei R um **ana2** von ϕ, q, x, so ist $R(0)$ stets eine Funktion. Im Speziellen ist $\texttt{rf2}\phi qx(0)$ eine Funktion.

352-4(Satz)

a) *Aus "R ist* **ana2** *von ϕ, q, x" folgt "$R(0)$ ist Relation" und "$R(0)$ ist Funktion".*

b) $\texttt{rf2}\phi qx(0)$ *Relation.*

c) $\texttt{rf2}\phi qx(0)$ *Funktion.*

Beweis **352-4** a) VS gleich R ist **ana2** von ϕ, q, x.

1: Aus VS gleich "R ist **ana2** von ϕ, q, x" folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

2.1: Via **259-36** gilt: $\{(0, q)\}$ Relation.

2.2: Via **259-36** gilt: $\{(0, q)\}$ Funktion.

3.1: Aus 2.1 und aus 1 folgt: $\boxed{R(0) \text{ Relation}}$

3.2: Aus 2.2 und aus 1 folgt: $\boxed{R(0) \text{ Funktion}}$

bc)

1: Via **350-10** gilt: $\texttt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

2.b): Aus 1"$\texttt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x" folgt via des bereits bewiesenen a): $\texttt{rf2}\phi qx(0)$ Relation.

2.c): Aus 1"$\texttt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x" folgt via des bereits bewiesenen a): $\texttt{rf2}\phi qx(0)$ Funktion.

□

352-5. Ist R **ana2** von ϕ, q, x und ist $n \in \mathsf{dom}\, R$, so ist $R(n)$ Relation.

<u>**352-5(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist **ana2** von ϕ, q, x.*

$\rightarrow$) *$n \in \mathsf{dom}\, R$.*

Dann folgt "$R(n)$ Relation".

<u>Beweis **352-5**</u>

<u>RECH-**Notation**</u>.

$$\mathsf{339.0}(x) \;=\{\omega : x(\omega) \text{ Relation}\}$$

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) \;=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge(\exists\Omega,\Xi : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

1: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$.

2: Aus $\rightarrow$) "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

3: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **352-4**: $R(0)$ Relation.

4: Aus 3 "$R(0)$ Relation"
folgt via **339-4**: $0 \in \mathsf{339.0}(R)$.

...

Beweis **352-5** ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $(\alpha \in \mathsf{339.0}(R)) \wedge (\alpha \in n)$.

`6.1`: Aus `Thema5` "$\alpha \in \mathsf{339.0}(R) \ldots$"
folgt via **339-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`6.2`: Aus `Thema5` "$\ldots \alpha \in n$",
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-9**: $1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`7`: Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus `6.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `6.2` "$1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1+\alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, x)$.

`8`: Via **350-2** gilt: $\mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, x)$ Relation.

`9`: Aus `7` und
aus `8`
folgt: $R(1+\alpha)$ Relation.

`10`: Aus `9` "$R(1+\alpha)$ Relation"
folgt via **339-4**: $1 + \alpha \in \mathsf{339.0}(R)$.

Ergo `Thema5`: `A1` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{339.0}(R)) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{339.0}(R))$"

`6`: Aus `2` "$n \in \mathbb{N}$",
aus `4` "$0 \in \mathsf{339.0}(R)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{339.0}(R)) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{339.0}(R))$"
folgt via **339-2**: $n \in \mathsf{339.0}(R)$.

`7`: Aus `6` "$n \in \mathsf{339.0}(R)$"
folgt via **339-3(Def)**: $R(n)$ Relation.

□

352-6. $\mathtt{rf}2\phi qx(n)$ ist für $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$ eine Relation.

352-6(Satz)

Aus "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$" *folgt* "$\mathtt{rf}2\phi qx(n)$ *Relation*".

Beweis **352-6** `VS` gleich $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$.

1: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf}2\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

2: Aus 1 "$\mathtt{rf}2\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus `VS` gleich "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$"
folgt via **352-5**: $\mathtt{rf}2\phi qx(n)$ Relation.

□

352-7. Ist R **ana2** von ϕ, q, x, so wird $R(1)$ - falls $1 \in \mathsf{dom}\, R$ - aus $R(0)$ mit der Rekursions-Vorshrift von **350-3(Def)** ermittelt. Dabei tritt $\mathtt{350.0}(R(0), x) = \mathtt{350.0}(\{(0, q)\}, x)$ auf.

352-7(Satz)

a) *Aus* "$w \in \mathtt{350.0}(\{(p, q)\}, \phi, x)$"
folgt "$\exists \Phi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin p) \wedge ((\Phi, \Xi) \in \phi) \wedge ((q, \Xi), \Gamma) \in x)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup p, \Gamma))$".

b) *Aus* "$(u, v) \in \mathtt{350.0}(\{(p, q)\}, \phi, x)$"
folgt "$\exists \Phi, \Xi : (\Phi \notin p) \wedge ((\Phi, \Xi) \in \phi) \wedge (((q, \Xi), v) \in x)$
$\wedge (u = \{\Phi\} \cup p)$".

c) *Aus* "$a \notin p$ *Menge*" *und* "$(a, c) \in \phi$" *und* "$((q, c), b) \in x$"
folgt "$(\{a\} \cup p, b) \in \mathtt{350.0}(\{(p, q)\}, \phi, x)$".

d) *Aus* "$w \in \mathtt{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, x)$"
folgt "$\exists \Phi, \Gamma, \Xi : ((\Phi, \Xi) \in \phi) \wedge ((q, \Xi), \Gamma) \in x)$
$\wedge (w = (\{\Phi\}, \Gamma))$".

e) *Aus* "$(u, v) \in \mathtt{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, x)$"
folgt "$\exists \Phi, \Xi : ((\Phi, \Xi) \in \phi) \wedge (((q, \Xi), v) \in x)$
$\wedge (u = \{\Phi\})$".

f) *Aus* "$(a, c) \in \phi$" *und* "$((q, c), b) \in x$"
folgt "$(\{a\}, b) \in \mathtt{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, x)$".

$\mathtt{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu)$
$\wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$

<u>Beweis **352-7**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \mathtt{350.0}(\{(p,q)\},\phi,x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathtt{350.0}(\{(p,q)\},\phi,x)$"
folgt via **350-1(Def)**: $\exists \Omega,\Phi,\Psi,\Gamma,\Xi : (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge((\Psi,\Omega) \in \{(p,q)\}) \wedge ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((\Omega,\Xi),\Gamma) \in x)$
$\wedge(w = (\{\Phi\} \cup \Psi,\Gamma))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots(\Psi,\Omega) \in \{(p,q)\}\ldots$"
folgt via **folk**: $(\Psi,\Omega) = (p,q)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Psi,\Omega) = (p,q)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(\Psi = p) \wedge (\Omega = q)$.

`4.1:` Aus `1`"$\ldots\Phi \notin \Psi\ldots$" und
aus `3`"$\Psi = p\ldots$"
folgt: $\Phi \notin p$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots\Omega = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega,\Xi) = (q,\Xi)$.

`4.3:` Aus `3`"$\Psi = p\ldots$"
folgt: $\{\Phi\} \cup \Psi = \{\Phi\} \cup p$.

`5.1:` Aus `4.2`"$(\Omega,\Xi) = (q,\Xi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega,\Xi),\Gamma) = ((q,\Xi),\Gamma)$.

`5.2:` Aus `4.3`"$\{\Phi\} \cup \Psi = \{\Phi\} \cup p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi,\Gamma) = (\{\Phi\} \cup p,\Gamma)$.

`6.1:` Aus `5.1` und
aus `1`"$\ldots((\Omega,\Xi),\Gamma) \in x\ldots$"
folgt: $((q,\Xi),\Gamma) \in x$.

`6.2:` Aus `1`"$\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi,\Gamma)$" und
aus `5.2`
folgt: $w = (\{\Phi\} \cup p,\Gamma)$.

`7:` Aus `1`"$\exists\ldots\Phi\ldots$",
aus `1`"$\exists\ldots\Gamma,\Xi\ldots$",
aus `4.1`"$\Phi \notin p$",
aus `1`"$\ldots(\Phi,\Xi) \in \phi\ldots$",
aus `6.1`"$((q,\Xi),\Gamma) \in x$" und
aus `6.2`"$w = (\{\Phi\} \cup p,\Gamma)$"
folgt:

$$\exists \Phi,\Gamma,\Xi : (\Phi \notin p) \wedge ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge ((q,\Xi),\Gamma) \in y) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup p,\Gamma)).$$

<u>Beweis **352-7**</u> `b)` `VS` gleich $(u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(p,q)\},\phi,x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(p,q)\},\phi,x)$"
folgt via **ElementAxiom**: (u,v) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(p,q)\},\phi,x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Phi,\Gamma,\Xi : (\Phi \notin p) \wedge ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge ((q,\Xi),\Gamma) \in x) \wedge ((u,v) = (\{\Phi\} \cup p,\Gamma))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (u,v) = (\{\Phi\} \cup p,\Gamma)$" und
aus `1.1`"(u,v) Menge"
folgt via **IGP**: $(u = \{\Phi\} \cup p) \wedge (v = \Gamma)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots v = \Gamma$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((q,\Xi),v) = ((q,\Xi),\Gamma)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots ((q,\Xi),\Gamma) \in x \ldots$"
folgt: $((q,\Xi),v) \in x$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Phi \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \ldots \Xi \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots \Phi \notin p \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots (\Phi,\Xi) \in \phi \ldots$",
aus `4` und
aus `2`"$u = \{\Phi\} \cup p \ldots$"
folgt: $\exists \Phi,\Xi : (\Phi \notin p) \wedge ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),v) \in x) \wedge (u = \{\Phi\} \cup p)$.

`c)` `VS` gleich $(a \notin p \text{ Menge}) \wedge ((a,c) \in \phi) \wedge (((q,c),b) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((q,c),b) \in x$"
folgt via **folk**: (q,c) Menge.

`2:` Aus `1`"(q,c) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: q,c Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge$\ldots$" und
aus `2`"$q \ldots$ Menge"
folgt via **259-36**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$a \notin p \ldots$",
aus `3`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$",
aus `VS` gleich "$\ldots (a,c) \in \phi \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots ((q,c),b) \in x$"
folgt via **350-2**: $(\{a\} \cup p,b) \in \mathtt{350.0}(\{(p,q)\},\phi,x)$.

<u>Beweis **352-7**</u> `d)` `VS` gleich $w \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Phi,\Gamma,\Xi : (\Phi \notin 0) \wedge ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),\Gamma) \in x) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup 0,\Gamma))$.

`2:` Via **folk** gilt: $\{\Phi\} \cup 0 = \{\Phi\}$.

`3:` Aus `2`"$\{\Phi\} \cup 0 = \{\Phi\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup 0,\Gamma) = (\{\Phi\},\Gamma)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1`"$\ldots w = (\{\Phi\} \cup 0,\Gamma)$"
folgt: $w = (\{\Phi\},\Gamma)$.

`5:` Aus `1`"$\exists \Phi,\Gamma,\Xi \ldots$",
aus `1`"$\ldots ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),\Gamma) \in x) \ldots$" und
aus `4`
folgt: $\exists \Phi,\Gamma,\Xi : ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),\Gamma) \in x) \wedge (w = (\{\Phi\},\Gamma))$.

`e)` `VS` gleich $(u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Phi,\Xi : (\Phi \notin 0) \wedge ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),v) \in x) \wedge (u = \{\Phi\} \cup 0)$.

`2:` Via **folk** gilt: $\{\Phi\} \cup 0 = \{\Phi\}$.

`3:` Aus `1`"$\ldots u = \{\Phi\} \cup 0$" und
aus `2`
folgt: $u = \{\Phi\}$.

`4:` Aus `1`"$\exists \Phi,\Xi \ldots$",
aus `1`"$\ldots ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),v) \in x) \ldots$" und
aus `3`
folgt: $\exists \Phi,\Xi : ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),v) \in x) \wedge (u = \{\Phi\})$.

<u>Beweis</u> **352-7** `f)` `VS` gleich $((a,c)\in\phi)\wedge(((q,c),b)\in x)$.

`1.1:` Via **folk** gilt: $a\notin 0$.

`1.2:` Via **folk** gilt: $\{a\}\cup 0=\{a\}$.

`2.1:` Aus `1.2`“$\{a\}\cup 0=\{a\}$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{a\}\cup 0,b)=(\{a\},b)$.

`2.2:` Aus `1.1`“$a\notin 0$”,
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”,
aus `VS` gleich “$((a,c)\in\phi)\wedge(((q,c),b)\in x)$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\{a\}\cup 0,b)\in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,x)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\{a\},b)\in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,x)$.

□

352-8. Sind ϕ, f Funktionen, so ist $\mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,f)$ eine Funktion.

352-8(Satz)

a) *Aus "R ist* **ana2** *von ϕ, q, x" und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$"*
folgt "$R(1) = \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,x)$ ".

b) *Aus "ϕ, f Funktion" folgt "$\mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,f)$ Funktion".*

c) *Aus "ϕ, f Funktion" und "R ist* **ana2** *von ϕ, q, f" und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$"*
folgt "$R(1)$ Funktion".

d) *Aus "ϕ, f Funktion" und "$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q f)$"*
folgt "$\mathtt{rf2}\phi q f(1)$ Funktion".

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu,\Omega)\in x) \wedge ((\lambda,\Xi)\in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

Beweis **352-8**

`RECH`-**Notation**.

...

<u>Beweis **352-8**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus +**schola**"$1 + 0 = 1$"
folgt: $1 + 0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`3:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$",
aus `1`"$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `2`"$1 + 0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1 + 0) = \mathsf{350.0}(R(0), \phi, x)$.

`4:` Aus `3` und
aus +**schola**"$1 + 0 = 0$"
folgt: $R(1) = \mathsf{350.0}(R(0), \phi, x)$.

`5:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $R(1) = \mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, x)$.

Beweis **352-8** `b)` `VS` gleich ϕ, f Funktion.

`1.1:` Via **350-2** gilt: $\mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,f)$ Relation.

$\boxed{\mathtt{Thema1.2}}$ $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma) \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha,\beta)\ldots \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,f)$ ”
folgt via **352-7**:
$\exists \Omega,\Psi : ((\Omega,\Psi) \in \phi) \wedge (((q,\Psi),\beta) \in f) \wedge (\alpha = \{\Omega\})$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots(\alpha,\gamma)\ldots \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,f)$ ”
folgt via **339-9**:
$\exists \Phi,\Xi : ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (((q,\Xi),\gamma) \in f) \wedge (\alpha = \{\Phi\})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$\phi\ldots$ Funktion… ” und
aus `2.1`“$\ldots(\Omega,\Psi) \in \phi\ldots$”
folgt via **folk**: $\Psi = \phi(\Omega)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “$\phi\ldots$ Funktion… ” und
aus `2.2`“$\ldots(\Phi,\Xi) \in \phi\ldots$”
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(\Phi)$.

`3.3:` Aus `2.1`“$\ldots(\Omega,\Psi) \in \phi\ldots$”
folgt via **folk**: Ω Menge.

`3.4:` Aus `VS` gleich “$\ldots f$ Funktion… ” und
aus `2.1`“$\ldots((q,\Psi),\beta) \in f\ldots$”
folgt via **folk**: $\beta = f((q,\Psi))$.

`3.5:` Aus `VS` gleich “$\ldots f$ Funktion… ” und
aus `2.2`“$\ldots((q,\Xi),\gamma) \in f\ldots$”
folgt via **folk**: $\gamma = f((q,\Xi))$.

`3.6:` Aus `2.1`“$\ldots\alpha = \{\Omega\}$” und
aus `2.2`“$\ldots\alpha = \{\Phi\}$”
folgt: $\{\Omega\} = \{\Phi\}$.

...

...

<u>Beweis **352-8**</u> `b)` `VS` gleich ϕ, f Funktion.

...

`Thema1.2` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, f)$.

...

4: Aus `3.3`"Ω Menge" und
aus `3`"$\{\Omega\} = \{\Phi\}$"
folgt via **SingeltonIdentitätsSatz**: $\Omega = \Phi$.

5: Aus `4`
folgt: $\phi(\Omega) = \phi(\Phi)$.

6: Aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus `5`
folgt: $\Psi = \Xi$.

7: Aus `6`"$\Psi = \Xi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(q, \Psi) = (q, \Xi)$.

8: Aus `7`
folgt: $f((q, \Psi)) = f((q, \Xi))$.

9: Aus `3.4`,
aus `3.5` und
aus `8`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

2: Aus `1.1`"$\mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, f)$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, f)$ Funktion.

<u>Beweis **352-8**</u> `c)`

`VS` gleich $(\phi, f \text{ Funktion}) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, f) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist **ana2** von $\phi, q, f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $R(1) = \mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, f)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "ϕ, f Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, f)$ Funktion.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $R(1)$ Funktion.

`d)` `VS` gleich $(\phi, f \text{ Funktion}) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}2\phi q f))$.

`1:` Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf}2\phi q f$ ist **ana2** von ϕ, q, f.

`2:` Aus `VS` gleich "ϕ, f Funktion…",
aus `1`"$\mathtt{rf}2\phi q f$ ist **ana2** von ϕ, q, f" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}2\phi q f)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathtt{rf}2\phi q f(1)$ Funktion.

□

Mengenlehre: Weiteres über $\mathsf{350.0}(x,z,y)$.

Ersterstellung: 08/07/15 **Letzte Änderung: 08/07/15**

353-1. Zunächst soll $\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$ genauer untersucht werden. Danach sollen Spezialisierungen des "Element-Seins" in $\mathsf{350.0}(x,y,z)$ auf $z=\phi$ Funktion erfolgen.

353-1(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)\subseteq(\mathsf{dom}\,x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\,(z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}$.

b) *Aus* "ϕ *Funktion*" *und* "$w\in\mathsf{350.0}(x,\phi,y)$ "
folgt "$\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Gamma:(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\phi(\Phi)),\Gamma)\in y)$
$\wedge(w=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma))$ ".

c) *Aus* "ϕ *Funktion*" *und* "$(p,q)\in\mathsf{350.0}(x,\phi,y)$ "
folgt "$\exists\Omega,\Phi,\Psi:(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\phi(\Phi)),q)\in y)$
$\wedge(p=\{\Phi\}\cup\Psi)$ ".

d) *Aus* "ϕ *Funktion*"
und "$p\notin E$"
und "$(E,a)\in x$"
und "$((a,\phi(p)),b)\in y$"
folgt "$(\{p\}\cup E,b)\in\mathsf{350.0}(x,\phi,y)$ ".

$\mathsf{350.0}(x,z,y)\;=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)$
$\wedge(\exists\Omega,\Xi:((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$

Beweis **353-1** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y)\,)$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\alpha,\Gamma) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)\,.$

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha,\Gamma) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$"
folgt via **350-2**:
$$\exists \Omega,\Phi,\Psi,\Xi : ((\Psi,\Omega) \in x) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\Gamma) \in y) \wedge (\alpha = \{\Phi\} \cup \Psi).$$

4.1: Aus 3 "$\ldots (\Psi,\Omega) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: $\Psi \in \mathsf{dom}\,x$.

4.2: Aus 2 "$\ldots ((\Omega,\Xi),\Gamma) \in y$"
folgt via **343-1**: $\Xi \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)$.

5: Aus 3 "$\ldots (\Phi,\Xi) \in z \ldots$" und
aus 4.2 "$\Xi \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)$"
folgt via **folk**: $\Phi \in z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)]$.

6: Aus 5 "$\Phi \in z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)]$"
folgt via **27-3**: $\{\Phi\} \in (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}$.

7: Aus 5 "$\{\Phi\} \in (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}$" und
aus 4.1 "$\Psi \in \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **220-6**:
$$\{\Phi\} \cup \Psi \in (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathsf{dom}\,x.$$

8: Aus 3 "$\ldots \alpha = \{\Phi\} \cup \Psi$" und
aus 7
folgt: $\alpha \in (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathsf{dom}\,x$.

...

...

<u>Beweis **353-1**</u> `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(350.0(x,z,y)\,)$.

...

`9:` Via **220-7** gilt:
$(z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathsf{dom}\,x$
$= (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}$.

`10:` Aus 8 und
aus 9
folgt: $\alpha \in (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}$.

Ergo `Thema1`:
$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(350.0(x,z,y)\,)) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:
$\mathsf{dom}\,(350.0(x,z,y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)])_{\mathrm{sngltn}}$.

Beweis **353-1** `b)` `VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (w \in \mathtt{350.0}(x, \phi, y))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathtt{350.0}(x, \phi, y)$"
folgt **p.def.**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge ((\Phi, \Xi) \in \phi) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…" und
aus `1`"$\ldots (\Phi, \Xi) \in \phi \ldots$"
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(\Phi)$.

`3:` Aus `2`"$\Xi = \phi(\Phi)$"
folgt via **PaarAxiom I** $(\Omega, \Xi) = (\Omega, \phi(\Phi))$.

`4:` Aus `3`"$(\Omega, \Xi) = (\Omega, \phi(\Phi))$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Xi), \Gamma) = ((\Omega, \phi(\Phi)), \Gamma)$.

`5:` Aus `4` und
aus `1`"$\ldots ((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y$"
folgt: $((\Omega, \phi(\Phi)), \Gamma) \in y$.

`6:` Aus `1`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma \ldots$",
aus `1`"$\ldots (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \ldots$",
aus `5` und
aus `1`"$\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \phi(\Phi)), \Gamma) \in y)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

<u>Beweis **353-1**</u> `c)` `VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,y))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,y)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(\phi \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,y))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x) \wedge (((\Omega,\phi(\Phi)),\Gamma) \in y)$
$\wedge((p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (\Gamma = q)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Gamma = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega,\phi(\Phi)),\Gamma) = ((\Omega,\phi(\Phi)),q)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots ((\Omega,\phi(\Phi)),\Gamma) \in y \ldots$"
folgt: $((\Omega,\phi(\Phi)),q) \in y$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x) \ldots$",
aus `4` und
aus `2`"$p = \{\Phi\} \cup \Psi \ldots$"
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x) \wedge (((\Omega,\phi(\Phi)),q) \in y) \wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi)$.

`d)`
`VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (p \notin E) \wedge ((E,a) \in x) \wedge (((a,\phi(p)),b) \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((a,\phi(p)),b) \in y$"
folgt via **folk**: $(a,\phi(p))$ Menge.

`2:` Aus `1`"$(a,\phi(p))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\phi(p)$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion$\ldots$" und
aus `2`"$\phi(p)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(p,\phi(p)) \in \phi$.

`4:` Aus `VS` gleich "$p \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots (E,a) \in x \ldots$",
aus `3`"$(p,\phi(p)) \in \phi$" und
aus `VS` gleich "$\ldots ((a,\phi(p)),b) \in y$"
folgt via **350-2**: $(\{p\} \cup E, b) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,y)$.

□

353-2. Nun sollen Spezialisierungen des “Element-Seins” in $\mathsf{350.0}(x,y,z)$ auf $y=\square$ Algebra in A erfolgen.

353-2(Satz)

a) *Aus* “$\square$ *Algebra in* A”
folgt “$\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,\square)\,)\subseteq(\mathsf{dom}\,x)\;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}(z^{-1}[A])_{\mathrm{sngltn}}$”
und “$\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(x,z,\square)\,)\subseteq A$”.

b) *Aus* “$\square$ *Algebra in* A” *und* “$w\in\mathsf{350.0}(x,z,\square)$”
folgt “$\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Xi:(\Omega,\Xi\in A)\wedge(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge((\Phi,\Xi)\in z)$
$\wedge(w=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Omega\_\square\_\Xi))$”.

c) *Aus* “$\square$ *Algebra in* A” *und* “$(p,q)\in\mathsf{350.0}(x,z,\square)$”
folgt “$\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Xi:(\Omega,\Xi\in A)\wedge(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge((\Phi,\Xi)\in z)$
$\wedge(p=\{\Phi\}\cup\Psi)\wedge(q=\Omega\_\square\_\Xi)$”.

d) *Aus* “$\square$ *Algebra in* A”
und “$p\notin E$”
und “$(E,a)\in x$”
und “$(p,q)\in z$”
und “$a,q\in A$”
folgt “$(\{p\}\cup E,a\_\square\_q)\in\mathsf{350.0}(x,z,\square)$”.

$\mathsf{350.0}(x,z,y)=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)$
$\wedge(\exists\Omega,\Xi:((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$
`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **353-2**</u> `a)` `VS` gleich $\Box$ Algebra in A.

`1.1:` Via **353-1** gilt:
$$\mathsf{dom}\,(350.0(x,z,\Box)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (z^{-1}[\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,\Box)])_{\mathrm{sngltn}}.$$

`1.2:` Via **350-12** gilt: $\mathsf{ran}\,(350.0(x,z,\Box)\,) \subseteq \mathsf{ran}\,\Box.$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **340-1**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A.$

`3.1:` Aus `1.1` und
aus `2.1`
folgt: $$\boxed{\mathsf{dom}\,(350.0(x,z,\Box)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (z^{-1}[A])_{\mathrm{sngltn}}}$$

`3.2:` Aus `1.2` "$\mathsf{ran}\,(350.0(x,z,\Box)\,) \subseteq \mathsf{ran}\,\Box$" und
aus `2.2` "$\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A$"
folgt via **folk**: $$\boxed{\mathsf{ran}\,(350.0(x,z,\Box)\,) \subseteq A}$$

<u>Beweis **353-2**</u> `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in \mathtt{350.0}(x, z, \Box))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathtt{350.0}(x, z, \Box)$"
folgt **p.def.**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in \Box)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1`"$\ldots ((\Omega, \Xi), \Gamma) \in \Box \ldots$"
folgt via **306-11**: $(\Omega, \Xi \in A) \wedge (\Gamma = \Omega \_ \Box \_ \Xi)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Gamma = \Omega \_ \Box \_ \Xi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \Box \_ \Xi)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1`"$\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma).$"
folgt: $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \Box \_ \Xi)$.

`5:` Aus `1`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \ldots$",
aus `1`"$\exists \ldots \Xi \ldots$",
aus `2`"$\Omega, \Xi \in A \ldots$",
aus `1`"$\ldots (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \ldots$" und
aus `4`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Xi : (\Omega, \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \Box \_ \Xi))$.

<u>Beweis</u> **<u>353-2</u>** `c)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(x,z,\square)\,)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathtt{350.0}(x,z,\square)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(\square \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(x,z,\square)\,)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega,\Phi,\Psi,\Xi : (\Omega,\Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z)$
$\wedge((p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Xi))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Xi)$" und
asu `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega\_\square\_\Xi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\exists \Omega,\Phi,\Psi,\Xi : (\Omega,\Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x)$
$\wedge((\Phi,\Xi) \in z) \ldots$" und
aus `2`
folgt:
$\exists \Omega,\Phi,\Psi,\Xi : (\Omega,\Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z)$
$\wedge(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega\_\square\_\Xi)$.

`d)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (p \notin E) \wedge ((E,a) \in x) \wedge ((p,q) \in z) \wedge (a,q \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a,q \in A$"
folgt via **316-9**: $((a,q), a\_\square\_q) \in \square$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots (E,a) \in x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in z \ldots$" und
aus `1`"$((a,q), a\_\square\_q) \in \square$"
folgt via **350-2**: $(\{p\} \cup E, a\_\square\_q) \in \mathtt{350.0}(x,z,\square)$.

$\square$

353-3. Bei den Untersuchungen von R, die **ana2** von ϕ, q, x sind, sind die Fälle mit ϕ Funktion und $x = \Box$ Algebra in A am nächsten bei der klassischen Theorie.

353-3(Satz)

a) *Aus* "ϕ *Funktion*" *und* "$\Box$ *Algebra in* A" *und* "$w \in \mathsf{350.0}(x, \phi, \Box)$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$ $\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega {}_{-}\Box{}_{-} \phi(\Phi)))$".

b) *Aus* "ϕ *Funktion*"
und "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$(p, q) \in \mathsf{350.0}(x, \phi, \Box)$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$ $\wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega {}_{-}\Box{}_{-} \phi(\Phi))$".

c) *Aus* "ϕ *Funktion*"
und "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$p \notin E$"
und "$p \in \phi^{-1}[A]$"
und "$(E, a) \in x$"
und "$a \in A$"
folgt "$(\{p\} \cup E, a {}_{-}\Box{}_{-} \phi(p)) \in \mathsf{350.0}(x, \phi, \Box)$".

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **353-3**</u> `a)`

`VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\square \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in \mathtt{350.0}(x, \phi, \square))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathtt{350.0}(x, \phi, \square)$"
folgt via **353-2**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Xi : (\Omega, \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge ((\Phi, \Xi) \in \phi)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \Xi))$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots (\Phi, \Xi) \in \phi \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Xi \in A \ldots$"
folgt via **folk**: $\Phi \in \phi^{-1}[A]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion$\ldots$" und
aus `1`"$\ldots (\Phi, \Xi) \in \phi \ldots$"
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(\Phi)$.

`3:` Aus `2.2`"$\Xi = \phi(\Phi)$"
folgt: $\Omega \_ \square \_ \Xi = \Omega \_ \square \_ \phi(\Phi)$.

`4:` Aus `3`"$\Omega \_ \square \_ \Xi = \Omega \_ \square \_ \phi(\Phi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \Xi) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \phi(\Phi))$.

`5:` Aus `4` und
aus `1`"$\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \Xi)$"
folgt: $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \phi(\Phi))$.

`6:` Aus `1`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \ldots \in A \ldots$",
aus `2.1`,
aus `1`"$\ldots (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \ldots$" und
aus `5`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \phi(\Phi)))$.

Beweis **353-3** `b)`
`VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,\Box))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,\Box)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,\Box))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x)$
$\wedge ((p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\Box\_\phi(\Phi)))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\Box\_\phi(\Phi))$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega\_\Box\_\phi(\Phi))$.

`3:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x) \ldots$" und
aus `2`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in x)$
$\wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega\_\Box\_\phi(\Phi))$.

`c)` `VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in} A) \wedge (p \notin E) \wedge (p \in \phi^{-1}[A])$
$\wedge ((E,a) \in x) \wedge (a \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \phi^{-1}[A] \ldots$"
folgt via **18-29**: $\phi(p) \in A$.

`2:` Aus `1`"$\phi(p) \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: $\phi(p)$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…" und
aus `2`"$\phi(p)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(p, \phi(p)) \in \phi$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots (E,a) \in x \ldots$",
aus `3`"$(p, \phi(p)) \in \phi$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in A$" und
aus `1`"$\phi(p) \in A$"
folgt via **353-2**: $(\{p\} \cup E, a\_\Box\_\phi(p)) \in \mathtt{350.0}(x,\phi,\Box)$.

$\Box$

353-4. Gelegentlich ist bei der Betrachtung von $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ in den soeben betrachteten Fällen die Situation $x = \{(0,q)\}$ interessant.

353-4(Satz)

a) *Aus* "ϕ *Funktion*" *und* "$(u,v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,y)$"
folgt "$\exists \Phi : (((q,\phi(\Phi)),v) \in y) \wedge (u = \{\Phi\})$".

b) *Aus* "ϕ *Funktion*" *und* "$((q,\phi(p)),b) \in y$"
folgt "$(\{p\},b) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,y)$".

c) *Aus* "$\Box$ *Algebra in* A" *und* "$(u,v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},z,\Box)$"
folgt "$q \in A$"
und "$\exists \Phi,\Xi : (\Xi \in A) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (u = \{\Phi\}) \wedge (v = q\_\Box\_\Xi)$".

d) *Aus* "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$(u,v) \in z$"
und "$q,v \in A$"
folgt "$(\{u\},q\_\Box\_v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},z,\Box)$".

e) *Aus* "ϕ *Funktion*"
und "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$(u,v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\Box)$"
folgt "$q \in A$"
und "$\exists \Phi : (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (u = \{\Phi\}) \wedge (v = q\_\Box\_\phi(\Phi))$".

f) *Aus* "ϕ *Funktion*"
und "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$u \in \phi^{-1}[A]$"
und "$q \in A$"
folgt "$(\{u\},q\_\Box\_\phi(u)) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\Box)$".

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu,\eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega,\Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$$

ALG-Notation.

<u>Beweis **353-4**</u> `a)` `VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge ((u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,y))$.

`1:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion ..." und
aus `VS` gleich "... $(u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},\phi,y)$"
folgt via **353-1**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in \{(0,q)\}) \wedge (((\Omega,\phi(\Phi)),v) \in y)$
$\wedge (u = \{\Phi\} \cup \Psi)$.

`2:` Aus `1`"... $(\Psi,\Omega) \in \{(0,q)\}$"
folgt via **259-36**: $(\Psi = 0) \wedge (\Omega = q)$.

`3.1:` Aus `2`"... $\Omega = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega,\phi(\Phi)) = (q,\phi(\Phi))$.

`3.2:` Aus `2`"$\Psi = 0$ ..." und
aus `1`"... $u = \{\Phi\} \cup \Psi$"
folgt: $u = \{\Phi\} \cup 0$.

`4:` Aus `3.1`"$(\Omega,\phi(\Phi)) = (q,\phi(\Phi))$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega,\phi(\Phi)),v) = ((q,\phi(\Phi)),v)$.

`5.1:` Aus `1`"... $((\Omega,\phi(\Phi)),v) \in y$ ..." und
aus `4`
folgt: $((q,\phi(\Phi)),v) \in y$.

`5.2:` Via **folk** gilt: $\{\Phi\} \cup 0 = \{\Phi\}$.

`6:` Aus `3.2` und
aus `5.2`
folgt: $u = \{\Phi\}$.

`7:` Aus `1`"$\exists$ ... Φ ...",
aus `5.1` und
aus `6`
folgt: $\exists \Phi : (((q,\phi(\Phi)),v) \in y) \wedge (u = \{\Phi\})$.

<u>Beweis **353-4**</u> `b) VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge ((q, \phi(p)), b) \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((q, \phi(p)), b) \in y$"
folgt via **folk**: $(q, \phi(p))$ Menge.

`2:` Aus `1` "$(q, \phi(p))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $q, \phi(p)$ Menge.

`3.1:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…" und
aus `2` "$\phi(p) \ldots$ Menge"
folgt via **304-1**: $(p, \phi(p)) \in \phi$.

`3.2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus `2` "$\ldots q$ Menge"
folgt via **259-36**: $(0, q) \in \{(0, q)\}$.

`3.3:` Via **folk** gilt: $p \notin 0$.

`4:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…",
aus `3.3` "$p \notin 0$",
aus `3.2` "$(0, q) \in \{(0, q)\}$" und
aus `VS` gleich "$((q, \phi(p)), b) \in y$"
folgt via **353-1**: $(\{p\} \cup 0, b) \in 350.0(\{(0, q)\}, \phi, y)$.

`5:` Via **folk** gilt: $\{p\} \cup 0 = \{p\}$.

`6:` Aus `5` "$\{p\} \cup 0 = \{p\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{p\} \cup 0, b) = (\{p\}, b)$.

`7:` Aus `6` und
aus `4`
folgt: $(\{p\}, b) \in 350.0(\{(0, q)\}, \phi, y)$.

<u>Beweis **353-4**</u> `c)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},z,\Box))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (u,v) \in \mathtt{350.0}(\{(0,q)\},z,\Box)$"
folgt via **353-2**:
$$\exists \Omega,\Phi,\Psi,\Xi : (\Omega,\Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in \{(0,q)\}) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (u = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (v = \Omega\_\Box\_\Xi).$$

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Psi,\Omega) \in \{(0,q)\} \ldots$"
folgt via **259-36**: $(\Psi = 0) \wedge (\Omega = q)$.

`3.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega \ldots \in A \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = q$"
folgt: $\boxed{q \in A}$

`3.2:` Aus `1`"$\ldots u = \{\Phi\} \cup \Psi \ldots$" und
aus `2`"$\Psi = 0 \ldots$"
folgt: $u = \{\Phi\} \cup 0.$

`3.3:` Aus `1`"$\ldots v = \Omega\_\Box\_\Xi$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = q$"
folgt: $v = q\_\Box\_\Xi.$

`4:` Via **folk** gilt: $\{\Phi\} \cup 0 = \{\Phi\}.$

`5:` Aus `3.2` und
aus `4`
folgt: $u = \{\Phi\}.$

`6:` Aus `1`"$\exists \ldots \Phi \ldots$",
aus `1`"$\exists \ldots \Xi \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Xi \in A \ldots$",
aus `1`"$\ldots (\Phi,\Xi) \in z \ldots$",
aus `5` und
aus `3.3`
folgt: $\boxed{\exists \Phi,\Xi : (\Xi \in A) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (u = \{\Phi\}) \wedge (v = q\_\Box\_\Xi)}$

<u>Beweis</u> **353-4** `d)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((u,v) \in z) \wedge (q, v \in A)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \ldots \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2:` Via **folk** gilt: $u \notin 0$.

`2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `1.1`"q Menge"
folgt via **259-36**: $(0,q) \in \{(0,q)\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `1.2`"$u \notin 0$",
aus `2`"$(0,q) \in \{(0,q)\}$",
aus `VS` gleich "$\ldots (u,v) \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q, v \in A$"
folgt via **353-2**: $(\{u\} \cup 0, q\_\Box\_v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\}, z, \Box)$.

`4:` Via **folk** gilt: $\{u\} \cup 0 = \{u\}$.

`5:` Aus `4`"$\{u\} \cup 0 = \{u\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{u\} \cup 0, q\_\Box\_v) = (\{u\}, q\_\Box\_v)$.

`6:` Aus `5` und
aus `3`
folgt: $(\{u\}, q\_\Box\_v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\}, z, \Box)$.

<u>Beweis **353-4**</u> `e)`

`VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((u,v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\Box))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((u,v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\Box))$"

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{q \in A}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((u,v) \in \mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\Box))$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Phi, \Xi : (\Xi \in A) \wedge ((\Phi,\Xi) \in \phi) \wedge (u = \{\Phi\}) \wedge (v = q{}_{-}\Box{}_{-}\Xi)$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots(\Phi,\Xi) \in \phi\ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots\Xi \in A\ldots$"
folgt via **folk**: $\Phi \in \phi^{-1}[A]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion$\ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots(\Phi,\Xi) \in \phi\ldots$"
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(\Phi)$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `1.2`"$\ldots v = q{}_{-}\Box{}_{-}\Xi$"
folgt: $v = q{}_{-}\Box{}_{-}\phi(\Phi)$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Phi\ldots$",
aus `2.1`,
aus `1.2`"$\ldots u = \{\Phi\}\ldots$" und
aus `3`

folgt: $\boxed{\exists \Phi : (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (u = \{\Phi\}) \wedge (v = q{}_{-}\Box{}_{-}\phi(\Phi))}$

<u>Beweis **353-4**</u> `f)`

`VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (u \in \phi^{-1}[A]) \wedge (q \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $u \in \phi^{-1}[A]$ …"
folgt via **18-29**: $\phi(u) \in A$.

`2:` Aus `1`"$\phi(u) \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: $\phi(u)$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…" und
aus `2`"$\phi(u)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(u, \phi(u)) \in \phi$.

`4:` Aus `VS` gleich "… $\Box$ Algebra in A …",
aus `3`"$(u, \phi(u)) \in \phi$",
aus `VS` gleich "… $q \in A$" und
aus `1`"$\phi(u) \in A$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$(\{u\}, q \_ \Box \_ \phi(u)) \in \mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, \Box)\,.$$

$\Box$

353-5. Für einen späteren Rekursions-Beweis wird noch $\mathsf{350.0}(f,z,y)$ für Funktionen f untersucht.

353-5(Satz)

a) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$w \in \mathsf{350.0}(f,z,y)$ ”
folgt “$\exists\Phi,\Psi,\Gamma,\Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (((f(\Psi),\Xi),\Gamma) \in y)$
$\wedge(w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$”.

b) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$(p,q) \in \mathsf{350.0}(f,z,y)$ ”
folgt “$\exists\Phi,\Psi,\Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (((f(\Psi),\Xi),q) \in y)$
$\wedge(p = \{\Phi\} \cup \Psi)$”.

c) *Aus* “f *Funktion*“
und “$p \notin E$”
und “$(p,q) \in z$”
und “$((f(E),q),b) \in y$”
folgt “$(\{p\} \cup E, b) \in \mathsf{350.0}(f,z,y)$ ”.

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge(\exists\Omega,\Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$$

<u>Beweis **353-5**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in \mathtt{350.0}(f,z,y))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathtt{350.0}(f,z,y)$"
folgt **p.def.**:
$$\exists \Omega,\Phi,\Psi,\Gamma,\Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi,\Omega) \in f) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\Gamma) \in y) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)).$$

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "$\ldots (\Psi,\Omega) \in f \ldots$"
folgt via **folk**: $\Omega = f(\Psi)$.

`3:` Aus `2` "$\Omega = f(\Psi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega,\Xi) = (f(\Psi),\Xi)$.

`4:` Aus `3` "$(\Omega,\Xi) = (f(\Psi),\Xi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega,\Xi),\Gamma) = ((f(\Psi),\Xi),\Gamma)$.

`5:` Aus `1` "$\ldots ((\Omega,\Xi),\Gamma) \in y \ldots$" und
aus `4`
folgt: $((f(\Psi),\Xi),\Gamma) \in y)$.

`6:` Aus `1` "$\exists \ldots \Phi,\Psi,\Gamma,\Xi \ldots$",
aus `1` "$\ldots \Phi \notin \Psi \ldots$",
aus `1` "$\ldots (\Phi,\Xi) \in z \ldots$",
aus `5` und
aus `1` "$\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$"
folgt: $$\exists \Phi,\Psi,\Gamma,\Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi,\Xi) \in z) \wedge (((f(\Psi),\Xi),\Gamma) \in y) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)).$$

<u>Beweis **353-5**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathsf{350.0}(f,z,y))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathsf{350.0}(f,z,y)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathsf{350.0}(f,z,y))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \wedge (((f(\Psi), \Xi), \Gamma) \in y)$
$\wedge ((p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Gamma)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots q = \Gamma$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((f(\Psi), \Xi), q) = ((f(\Psi), \Xi), \Gamma)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots ((f(\Psi), \Xi), \Gamma) \in y \ldots$"
folgt: $((f(\Psi), \Xi), q) \in y$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Phi, \Psi, \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \ldots \Xi \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \ldots$",
aus `4` und
aus `2`"$p = \{\Phi\} \cup \Psi \ldots$"
folgt:
$\exists \Phi, \Psi, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \wedge (((f(\Psi), \Xi), q) \in y) \wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi)$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \notin E) \wedge ((p,q) \in z) \wedge (((f(E), q), b) \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((f(E), q), b) \in y$"
folgt via **folk**: $(f(E), q)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$(f(E), q)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $f(E)$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `2`"$f(E)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(E, f(E)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E \ldots$",
aus `3`"$(E, f(E)) \in f$",
aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots ((f(E), q), b) \in y$"
folgt via **350-2**: $(\{p\} \cup E, b) \in \mathsf{350.0}(f,z,y)$.

□

353-6. Gelegentlich ist $\mathtt{350.0}(f,\phi,y)$ für Funktionen f,ϕ interessant..

353-6(Satz)

a) *Aus* "f,ϕ *Funktion*" *und* "$w\in\mathtt{350.0}(f,\phi,y)$"
folgt "$\exists\Phi,\Psi,\Gamma:(\Phi\notin\Psi)\wedge(((f(\Psi),\phi(\Phi)),\Gamma)\in y)$
$\wedge(w=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma))$".

b) *Aus* "f,ϕ *Funktion*" *und* "$(p,q)\in\mathtt{350.0}(f,\phi,y)$"
folgt "$\exists\Phi,\Psi:(\Phi\notin\Psi)\wedge(((f(\Psi),\phi(\Phi)),q)\in y)$
$\wedge(p=\{\Phi\}\cup\Psi)$".

c) *Aus* "f,ϕ *Funktion*"
und "$p\notin E$"
und "$((f(E),\phi(p)),b)\in y$"
folgt "$(\{p\}\cup E,b)\in\mathtt{350.0}(f,\phi,y)$".

$$\mathtt{350.0}(x,z,y)=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)$$
$$\wedge(\exists\Omega,\Xi:((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

Beweis **353-6** `a)` `VS` gleich $(f, \phi \text{ Funktion}) \wedge (w \in \texttt{350.0}(f, \phi, y))$.

`1:` Aus `VS` gleich " $f \ldots$ Funktion... " und
aus `VS` gleich " $\ldots w \in \texttt{350.0}(f, \phi, y)$ "
folgt via **353-5**:

$$\exists \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in \phi) \wedge (((f(\Psi), \Xi), \Gamma) \in y) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)).$$

`2:` Aus `VS` gleich " $\ldots \phi$ Funktion... " und
aus `1` " $\ldots (\Phi, \Xi) \in \phi \ldots$ "
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(\Phi)$.

`3:` Aus `2` " $\Xi = \phi(\Phi)$ "
folgt via **PaarAxiom I**: $(f(\Psi), \Xi) = (f(\Psi), \phi(\Phi))$.

`4:` Aus `3` " $(f(\Psi), \Xi) = (f(\Psi), \phi(\Phi))$ "
folgt via **PaarAxiom I**: $((f(\Psi), \Xi), \Gamma) = ((f(\Psi), \phi(\Phi)), \Gamma)$.

`5:` Aus `4` und
aus `1` " $\ldots ((f(\Psi), \Xi), \Gamma) \in y$ "
folgt: $((f(\Psi), \phi(\Phi)), \Gamma) \in y$.

`6:` Aus `1` " $\exists \Phi, \Psi, \Gamma \ldots$ ",
aus `1` " $\ldots \Phi \notin \Psi \ldots$ ",
aus `5` und
aus `1` " $\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$ "
folgt:

$$\exists \Phi, \Psi, \Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge (((f(\Psi), \phi(\Phi)), \Gamma) \in y) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)).$$

<u>Beweis **353-6**</u> `b)` `VS` gleich $(f,\phi \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(f,\phi,y))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathtt{350.0}(f,\phi,y)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(f,\phi \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(f,\phi,y))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Phi,\Psi,\Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge (((f(\Psi),\phi(\Phi)),\Gamma) \in y) \wedge ((p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi,\Gamma)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi,\Gamma)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Gamma)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots q = \Gamma$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((f(\Psi),\phi(\Phi)),q) = ((f(\Psi),\phi(\Phi)),\Gamma)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots ((f(\Psi),\phi(\Phi)),\Gamma) \in y \ldots$"
folgt $((f(\Psi),\phi(\Phi)),q) \in y$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Phi,\Psi \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots \Phi \notin \Psi \ldots$",
aus `4` und
aus `2`"$p = \{\Phi\} \cup \Psi \ldots$"
folgt: $\exists \Phi,\Psi : (\Phi \notin \Psi) \wedge (((f(\Psi),\phi(\Phi)),q) \in y) \wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi)$.

`c)` `VS` gleich $(f,\phi \text{ Funktion}) \wedge (p \notin E) \wedge (((f(E),\phi(p)),b) \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((f(E),\phi(p)),b) \in y$"
folgt via **folk**: $(f(E),\phi(p))$ Menge.

`2:` Aus `1`"$(f(E),\phi(p))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\phi(p)$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion…" und
aus `2`"$\phi(p)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(p,\phi(p)) \in \phi$.

`4:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…",
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E \ldots$",
aus `3`"$(p,\phi(p)) \in \phi$" und
aus `VS` gleich "$((f(E),\phi(p)),b) \in y$"
folgt via **353-5**: $(\{p\} \cup E,b) \in \mathtt{350.0}(f,\phi,y)$.

□

353-7. 353-5 nimmt im Fall $y = \Box$ Algebra in A modifizierte Form an.

353-7(Satz)

a) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$\Box$ *Algebra in* A" *und* "$w \in \mathsf{350.0}(f, z, \Box)$"
folgt "$\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi) {}_\_\Box{}_\_ \Xi))$".

b) *Aus* "f *Funktion*"
und "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$(p, q) \in \mathsf{350.0}(f, z, \Box)$"
folgt "$q \in A$"
und "$\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z)$
$\wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = f(\Psi) {}_\_\Box{}_\_ \Xi)$".

c) *Aus* "f *Funktion*"
und "$\Box$ *Algebra in* A
und "$p \notin E$"
und "$(p, q) \in z$"
und "$f(E), q \in A$"
folgt "$(\{p\} \cup E, f(E) {}_\_\Box{}_\_ q) \in \mathsf{350.0}(f, z, \Box)$".

$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu)$
$\wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$
`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **353-7**</u> `a)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\square \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in \mathtt{350.0}(f, z, \square))$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $w \in \mathtt{350.0}(f, z, \square)$"
folgt via **353-5**:
$$\exists \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \wedge (((f(\Psi), \Xi), \Gamma) \in \square)$$
$$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)).$$

`2:` Aus `VS` gleich "… $\square$ Algebra in A…" und
aus `1`"… $((f(\Psi), \Xi), \Gamma) \in \square$…"
folgt via **306-11**: $(f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Gamma = f(\Psi)\_\square\_\Xi)$.

`3:` Aus `2`"… $\Gamma = f(\Psi)\_\square\_\Xi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\square\_\Xi)$.

`4:` Aus `1`"… $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$" und
aus `3`
folgt: $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\square\_\Xi)$.

`5:` Aus `1`"$\exists \Phi, \Psi$…",
aus `1`"$\exists$…Ξ…",
aus `2`"$f(\Psi), \Xi \in A$…",
aus `1`"… $(\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z)$…" und
aus `4`
folgt:
$$\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z)$$
$$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\square\_\Xi)).$$

<u>Beweis **353-7**</u> `b)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(f,z,\Box))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathtt{350.0}(f,z,\Box)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(f,z,\Box))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z)$$
$$\wedge ((p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\Xi)).$$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots f(\Psi), \Xi \in A \ldots$"
folgt via **93-12**: $f(\Psi)\_\Box\_\Xi \in A$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\Xi)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = f(\Psi)\_\Box\_\Xi)$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\ldots q = f(\Psi)\_\Box\_\Xi$" und
aus `2.1`
folgt: $\boxed{q \in A}$

`3.2:` Aus `1.2`"$\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \ldots$" und
aus `2.2`
folgt:
$$\boxed{\begin{array}{l}\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \\ \qquad \wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = f(\Psi)\_\Box\_\Xi)\end{array}}$$

`c)` `VS` gleich
$(f \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (p \notin E) \wedge ((p,q) \in z) \wedge (f(E), q \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots f(E), q \in A$"
folgt via **316-9**: $((f(E), q), f(E)\_\Box\_q) \in \Box$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in z \ldots$" und
aus `1`"$((f(E), q), f(E)\_\Box\_q) \in \Box$"
folgt via **353-5**: $(\{p\} \cup E, f(E)\_\Box\_q) \in \mathtt{350.0}(f,z,\Box)$.

$\Box$

353-8. Etliche Struktur ist verfügbar, wenn bei der Untersuchung des “Element-Seins ” in $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ auf $x = f$ Funktion und $z = \phi$ Funktion und $y = \Box$ Algebra in A zurück gegriffen werden kann.

353-8(Satz)

a) *Aus* “f, ϕ *Funktion*”
und “$\Box$ *Algebra in* A”
und “$w \in \mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)$ ”
folgt “$\exists \Phi, \Psi : (f(\Psi) \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi)))$”.

b) *Aus* “f, ϕ *Funktion*”
und “$\Box$ *Algebra in* A”
und “$(p, q) \in \mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)$ ”
folgt “$q \in A$”
und “$\exists \Phi, \Psi : (f(\Psi) \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi))$”.

c) *Aus* “f, ϕ *Funktion*“
und “$\Box$ *Algebra in* A
und “$p \notin E$”
und “$p \in \phi^{-1}[A]$”
und “$f(E) \in A$”
folgt “$(\{p\} \cup E, f(E)\_\Box\_\phi(p)) \in \mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)$ ”.

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

ALG-Notation.

<u>Beweis **353-8**</u> `a)` `VS` gleich $(f, \phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A)$
$\wedge(w \in \mathtt{350.0}(f, \phi, \Box))$.

`1:` Aus `VS` gleich “f Funktion… ” und
aus `VS` gleich “…($\Box$ Algebra) $\wedge$ ($w \in \mathtt{350.0}(f, \phi, \Box)$)”
folgt via **353-7**: $\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in \phi)$
$\wedge(w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\Xi))$.

`2.1:` Aus `1`“…$(\Phi, \Xi) \in \phi$…” und
aus `1`“…$\Xi \in A$…”
folgt via **folk**: $\Phi \in \phi^{-1}[A]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “…ϕ Funktion… ” und
aus `1`“…$(\Phi, \Xi) \in \phi$…”
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(\Phi)$.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $f(\Psi)\_\Box\_\Xi = f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi)$.

`4:` Aus `3`“$f(\Psi)\_\Box\_\Xi = f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi)$”
folgt via **PaarAxiom I**:
$(\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\Xi) = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi))$.

`5:` Aus `1`“…$w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\Xi)$” und
aus `4`
folgt: $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi))$.

`6:` Aus `1`“$\exists \Phi, \Psi$…”,
aus `1`“…$f(\Psi)$…$\in A$…”,
aus `2.1`,
aus `1`“…$\Phi \notin \Psi$…” und
aus `5`
folgt: $\exists \Phi, \Psi : (f(\Psi) \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge(w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi)))$.

<u>Beweis **353-8**</u> `b)` `VS` gleich $(f, \phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A)$
$\wedge((p,q) \in \mathtt{350.0}(f,\phi,\Box))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "…$(\Box$ Algebra$) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(f,\phi,\Box))$"
folgt via **353-7**: $\boxed{q \in A}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "…$(\Box$ Algebra$) \wedge ((p,q) \in \mathtt{350.0}(f,\phi,\Box))$"
folgt via **353-7**: $\exists \Phi, \Psi, \Xi : (f(\Psi), \Xi \in A) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Phi, \Xi) \in \phi)$
$\wedge(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = f(\Psi)\_\Box\_\Xi)$.

`2.1:` Aus `1.2`"…$(\Phi, \Xi) \in \phi$…" und
aus `1.2`"…$\Xi \in A$…"
folgt via **folk**: $\Phi \in \phi^{-1}[A]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "…ϕ Funktion…" und
aus `1.2`"…$(\Phi, \Xi) \in \phi$…"
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(\Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"…$q = f(\Psi)\_\Box\_\Xi$" und
aus `2.2`
folgt: $q = f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi)$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Phi, \Psi$…",
aus `1.2`"…$f(\Psi)$…$\in A$…",
aus `2.1`,
aus `1.2`"…$\Phi \notin \Psi$…",
aus `1.2`"…$p = \{\Phi\} \cup \Psi$…" und
aus `3`
folgt: $\exists \Phi, \Psi : (f(\Psi) \in A) \wedge (\Phi \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi))$.

<u>Beweis **353-8**</u> `c)` `VS` gleich $(f, \phi \text{ Funktion}) \wedge (\square \text{ Algebra in } A)$
$\wedge (p \notin E) \wedge (p \in \phi^{-1}[A]) \wedge (f(E) \in A)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \phi^{-1}[A] \ldots$"
folgt via **18-29**: $\phi(p) \in A$.

`2`: Aus `1`"$\phi(p) \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: $\phi(p)$ Menge.

`3`: Aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion$\ldots$" und
aus `2`"$\phi(p)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(p, \phi(p)) \in \phi$.

`4`: Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \square$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E \ldots$",
aus `3`"$(p, \phi(p)) \in \phi$",
aus `VS` gleich "$\ldots f(E) \in A$" und
aus `1`"$\phi(p) \in A$"
folgt via **353-7**: $(\{p\} \cup E, f(E)\_\square\_\phi(p)) \in \mathsf{350.0}(f, \phi, \square)$.

$\square$

Analysis: R ist **ana2** von ϕ, q, x: Einiges über $\mathsf{dom}\, R$.
R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$: $\Box$ Algebra in A.

Ersterstellung: 10/07/15 **Letzte Änderung: 10/07/15**

354-1. Ist R **ana2** von ϕ, q, x, so hat die via **350-3(Def)** gültige Aussage $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ entsprechend bekannter Aussagen über $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ mannigfaltige Konsequenzen.

354-1(Satz) *Aus "R ist* **ana2** *von ϕ, q, x" und ...*

a) *... und "$n \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$n \in \mathbb{N}$" und "$(\mathsf{dom}\, R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$".*

b) *... und "$p \in n \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$p, 1{+}p \in \mathbb{N}$" und "$p, 1{+}p \in \mathsf{dom}\, R$".*

c) *... und "$m \leq n \in \mathsf{dom}\, R$" und "$m \in \mathbb{N}$" folgt "$m \in \mathsf{dom}\, R$".*

d) *... und "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und "$m \notin \mathsf{dom}\, R$" und "$m \in \mathbb{N}$" folgt "$n < m$".*

e) *... und "$n \in \mathbb{N}$" und "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und "$R(1 + n) = 350.0(R(n), \phi, x)$".*

f) *... und "$n \in \mathbb{N}$" und "$1{+}(1{+}n) \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$n, 1{+}n \in \mathsf{dom}\, R$".*

g) *... und "$\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$" folgt "$R = \mathtt{rf2}\phi q x$" und "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q x) = \mathbb{N}$".*

h) *... und "$R(n)$ Funktion" und "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$R(1 + n) = 350.0(R(n), \phi, x)$".*

$\leq$.RECH-**Notation**.

$$350.0(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

<u>Beweis **354-1**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"

folgt via **337-9**: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"

folgt via **343-6**: $\boxed{(\mathsf{dom}\, R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}}$

`b)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (p \in n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"

folgt via **338-8**: $\boxed{(p \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, R)}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"

folgt via **338-9**: $\boxed{1 + p \in \mathsf{dom}\, R}$

`3:` Aus `2.1`"$p \in \mathbb{N} \ldots$"

folgt via **159-10**: $\boxed{1 + p \in \mathbb{N}}$

<u>Beweis **354-1**</u> `c)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (m \leq n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich “R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$”
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{N}$”,
aus `VS` gleich “$\ldots m \leq n \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **340-4**: $m \in \mathsf{dom}\, R$.

`d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich “R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$”
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **343-8**: $n < m$.

`e)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich “R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$”
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **343-8**: $\boxed{n \in \mathsf{dom}\, R}$

`3:` Aus `VS` gleich “R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$”,
aus `2`“$n \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `VS` gleich “$\ldots 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **350-3(Def)**: $\boxed{R(1 + n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)}$

`f)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + (1 + n) \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich “R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$”
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + (1 + n) \in \mathsf{dom}\, R)$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **343-8**: $n, 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

<u>Beweis **354-1**</u> `g)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-10**: $R \subseteq \mathtt{rf2}\phi qx$.

`2:` Aus `1` "$R \subseteq \mathtt{rf2}\phi qx$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$" und
aus `2`
folgt: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$.

`4:` Via **350-10** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`5:` Aus `3` "$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$" und
aus `4` "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **308-6**: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}}$

`6.1:` Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion.

`6.2:` Aus `5` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, R = \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$.

`7:` Aus `1` "$R \subseteq \mathtt{rf2}\phi qx$",
aus `6.1` "$\mathtt{rf1}qx$ Funktion" und
aus `6.2` "$\mathsf{dom}\, R = \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$"
folgt via **308-6**: $\boxed{R = \mathtt{rf2}\phi qx}$

`h)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (R(n) \text{ Funktion}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(n)$ Funktion$\ldots$"
folgt via **339-5**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

`2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$",
aus `1` "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1 + n) = 350.0(R(n), \phi, x)$.

□

354-2. Ist R **ana2** von ϕ, q, x, so gilt $R^{-1}[E] \subseteq \mathbb{N}$.

<u>**354-2(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x.

Dann folgt:

a) $R^{-1}[E] \subseteq \mathbb{N}$.

b) $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}2\phi q x)$.

<u>Beweis **354-2**</u> a)

1.1: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

1.2: Via **folk** gilt: $R^{-1}[E] \subseteq \mathsf{dom}\, R$.

2: Aus 1.2 "$R^{-1}[E] \subseteq \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-3**: $R^{-1}[E] \subseteq \mathbb{N}$.

b)

1: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-10**: $R \subseteq \mathtt{rf}2\phi q x$.

2: Aus 1 "$R \subseteq \mathtt{rf}2\phi q x$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}2\phi q x)$.

□

354-3. Ist $n \in \mathsf{dom}\, R$, wobei R **ana1** von $q, \Box$ und $\Box$ eine Algebra in A ist, so ist $\mathsf{dom}\,(R(n))$ eine Teilklasse von A. Erstmalig wird "... folgt **p.def.**" eingesetzt, um die Zugehörigkeit zu einem Klassen-Term zu verifizieren.

354-3(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) R *ist* **ana2** *von* $\phi, q, \Box$.

$\rightarrow$) $n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

b) $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

c) $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$.

d) $R(n) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times (\{q\} \cup A)$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **354-3**

$$\mathsf{341.0}(x, y) = \{\omega : \mathsf{dom}\,(x(\omega)) \subseteq y\}$$

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

<u>Beweis **354-3**</u> `a)`

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "R ist **ana2** von $\phi, q, \square$" und
aus$\rightarrow)$ "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **354-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "R ist **ana2** von $\phi, q, \square$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`2:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \{0\}$.

`3:` Via **341-2** gilt: $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`4:` Aus `2`"$\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \{0\}$" und
aus `3`"$\{0\} \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`5:` Aus `1.2` und
aus `4`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`6:` Aus `5`"$\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))$.

...

Beweis **354-3** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $(\alpha \in \mathtt{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))\,) \wedge (\alpha \in n)$

`8.1:` Aus `Thema7` "$\alpha \in \mathtt{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))\ \ldots$"
folgt **p.def.**: $\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`8.2:` Aus →) "R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus `Thema7` "$\ldots \alpha \in n$" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **354-1**: $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`9:` Aus →) "R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$" und
aus `8.2` "$\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1+\alpha) = \mathtt{350.0}(R(\alpha), \phi, \Box)$.

`10:` Aus `9`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) = \mathsf{dom}\,(\mathtt{350.0}(R(\alpha), \phi, \Box)\,)$.

`11:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **353-2**:
$\mathsf{dom}\,(\mathtt{350.0}(R(\alpha), \phi, \Box)\,)$
$\subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\phi^{-1}[A])_{\mathrm{sngltn}}$.

`12.1:` Aus `10` und
aus `11`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\phi^{-1}[A])_{\mathrm{sngltn}}$.

`12.2:` Aus `8.1` "$\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$"
folgt via **220-9**:
$\mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\phi^{-1}[A])_{\mathrm{sngltn}}$
$\subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\phi^{-1}[A])_{\mathrm{sngltn}}$.

...

...

<u>Beweis</u> **354-3** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $(\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))\,) \wedge (\alpha \in n)$

...

13.1: Aus 12.1 "$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} (\phi^{-1}[A])_{\text{sngltn}}$" und
aus 12.2 "$\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} (\phi^{-1}[A])_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} (\phi^{-1}[A])_{\text{sngltn}}$"
folgt via **folk**:
$$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} (\phi^{-1}[A])_{\text{sngltn}}.$$

13.2: Via **341-4** gilt:
$$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} (\phi^{-1}[A])_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]).$$

14: Aus 13.1 "$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} (\phi^{-1}[A])_{\text{sngltn}}$" und
aus 13.2 "$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} (\phi^{-1}[A])_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

15: Aus 8.2 "$\ldots 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,R$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+\alpha$ Menge.

16: Aus 14 "$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$" und
aus 15 "$1+\alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1+\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))$.

Ergo Thema7:

A1 | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))\,) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))\,)$"

8: Aus 1.1 "$n \in \mathbb{N}$",
aus 6 "$0 \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))\,) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))\,)$"
folgt via **339-2**: $n \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]))$.

9: Aus 8 "$n \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))$"
folgt **p.def.**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

Beweis **354-3** `b)`

`1:` Aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$” und
aus →) “$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`2:` Aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$” und
aus →) “$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **352-2**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`3:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$” und
aus `2`“$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$”
folgt via **2-12**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`c)`

`1:` Es gilt: $(n = 0) \vee (0 \neq n)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

`2:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \{q\}$.

`3:` Aus →) “R ist **ana2** von ϕ, q, x”
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(0)) \subseteq \{q\}$.

`5:` Via **folk** gilt: $\{q\} \subseteq \{q\} \cup A$.

`6:` Aus `4`“$\mathsf{ran}\,(R(0)) \subseteq \{q\}$” und
aus `5`“$\{q\} \subseteq \{q\} \cup A$”
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\,(R(0)) \subseteq \{q\} \cup A$.

`7:` Aus `6` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$.

...

Beweis **354-3** `c)` ...

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq n.$

`2:` Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **354-1**: $n \in \mathbb{N}.$

`3:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq n$" und
aus `2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega).$

`4.1:` Aus `3`"$\ldots n = 1 + \Omega$" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt: $1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R.$

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **239-5**: $\Omega \in 1 + \Omega.$

`5:` Aus →) "R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus `4.2`"$\Omega \in 1 + \Omega$" und
aus `4.1`"$1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **354-1**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, R.$

`6:` Aus →) "R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus `5`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `4.1`"$1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1 + \Omega) = \mathsf{350.0}(R(\Omega), \phi, \Box)\,.$

`7.1:` Aus `6` und
aus `3`"$\ldots n = 1 + \Omega$"
folgt: $R(n) = \mathsf{350.0}(R(\Omega), \phi, \Box)\,.$

`7.2:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **353-2**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{350.0}(R(\Omega), \phi, \Box) \subseteq A.$

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A.$

`9:` Via **folk** gilt: $A \subseteq \{q\} \cup A.$

`10:` Aus `8`"$\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$" und
aus `8`"$A \subseteq \{q\} \cup A$"
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A.$

Beweis **354-3** `d)`

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana2** von $\phi, q, \square$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **352-5**: $R(n)$ Relation.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$.

`2:` Aus `1.1` "$R(n)$ Relation",
aus `1.2` "$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$" und
aus `1.3` "$\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$"
folgt via **341-2**: $R(n) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times (\{q\} \cup A)$.

$\square$

354-4. Über $\mathsf{350.0}(x,z,y)$ soll zwischenspielerisch Weiteres ausgesagt werden.

354-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $p \notin E$.

$\rightarrow\!)$ $(E,a) \in x$.

$\rightarrow\!)$ $(p,q) \in z$.

$\rightarrow\!)$ $(a,q) \in \mathsf{dom}\, y$.

Dann folgt "$\{p\} \cup E \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y))$".

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$$

Beweis **354-4**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$(a,q) \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : ((a,q),\Omega) \in y$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$p \notin E$",
aus $\rightarrow\!)$ "$(E,a) \in x$",
aus $\rightarrow\!)$ "$(p,q) \in z$" und
aus 1 "$\ldots ((a,q),\Omega) \in y$"
folgt via **350-2**: $(\{p\} \cup E, \Omega) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$.

3: Aus 2 "$(\{p\} \cup E, \Omega) \in \mathsf{350.0}(x,z,y)$"
folgt via **folk**: $\{p\} \cup E \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(x,z,y))$.

$\square$

354-5. Im vermutlich interessantesten Fall $q \in A$ ergeben sich für jedes R, das **ana2** von $\phi, q, \square$ mit einer Algebra $\square$ in A ist, weitreichende Konsequenzen. Zunächst sollen unter anderem $\mathsf{dom}\,(R(n))$, $n \in \mathbb{N}$, betrachtet werden. Die Beweis-Reihenfolge ist `acb)`.

354-5(Satz) *Es gelte:*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) R *ist* **ana2** *von* $\phi, q, \square$.

→) $q \in A$.

→) $n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt:

a) $R(n) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times A$.

b) $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

c) $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **354-5**

$$\mathsf{341.1}(x,y) = \{\omega : x \cap (\mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega}) \subseteq \mathsf{dom}\,(y(\omega))\}$$

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$$

<u>Beweis</u> **354-5** `ac)`

`1.1:` Aus →) “$\square$ Algebra in A”,
aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \square$” und
aus →) “$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-3**: $R(n) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A] \times (\{q\} \cup A)$.

`1.2:` Aus →) “$\square$ Algebra in A”,
aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \square$” und
aus →) “$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-3**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$.

`2:` Aus →) “$q \in A$”
folgt via **308-8**: $\{q\} \cup A = A$.

`3.a):` Aus `1.1` und
aus 2
folgt: $R(n) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times A$.

`3.c):` Aus `1.2` und
aus 2
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

`b)`

`1.1:` Aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \square$” und
aus→) “$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \square$”
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`1.3:` Aus →) “$q \in A$”
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.4:` Via **341-2** gilt: $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`2.1:` Aus `1.4`“$\{0\} \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$”
folgt via **folk**: $\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap \{0\} = \{0\}$.

`2.2:` Aus `1.3`“q Menge”
folgt via **308-1**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) = 1$.

`3:` $\mathsf{dom}\,(R(0)) \stackrel{1.2}{=} \mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \stackrel{2.2}{=} 1 \stackrel{\mathbf{95-1(Def)}}{=} \{0\} \stackrel{2.1}{=} \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap \{0\}$
$\stackrel{\mathbf{341-2}}{=} \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1}) \stackrel{\mathbf{+schola}}{=} \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$.

`4:` Aus 3“$\mathsf{dom}\,(R(0)) = \ldots = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$”
folgt via **folk**: $\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(0))$.

...

Beweis **354-5** `b)` ...

`5:` Aus `4`“$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(0))$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt **p.def.**: $0 \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)$.

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)) \wedge (\alpha \in n)$

`7.1:` Aus →)“R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus `Thema6`“$\dots \alpha \in n$” und
aus →)“$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`7.2:` Aus →)“R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus `Thema6`“$\dots \alpha \in n$” und
aus →)“$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

`7.3:` Aus `Thema6`“$\alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)$”
folgt **p.def.**: $\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$.

`8.1:` Aus `7.1`“$\dots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \alpha$ Menge.

`8.2:` Aus `7.2`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + \alpha) = \alpha$.

`8.3:` Aus →)“$\Box$ Algebra in A”,
aus →)“R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus →)“$q \in A$” und
aus `7.1`“$\alpha \dots \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$R(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times A$.

`8.4:` Aus →)“R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$” und
aus `7.1`“$\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **350-3(Def)**: $R(1 + \alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, \Box)$.

...

...

<u>Beweis</u> **354-5** `b)` ...

`Thema6` $(\alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)) \wedge (\alpha \in n)$

...

`Thema9` $\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)})$.

`10:` Aus `Thema9` und
aus `8.2`
folgt: $\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha})$.

`11:` Aus `10`"$\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha})$"
folgt via **folk**: $\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha}$.

`12:` Aus `7.2`"$\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus `11`"$\beta \in \ldots \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha}$"
folgt via **341-8**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \beta) \wedge (\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}) \wedge (\beta = \{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\})).$$

`13.1:` Aus `12`"$\ldots \Omega \in \beta \ldots$" und
aus `11`"$\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \ldots$"
folgt via **341-2**: $\Omega \in \phi^{-1}[A]$.

`13.2:` Aus `12`"$\ldots \beta = \{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\})$" und
aus `11`"$\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \ldots$"
folgt: $\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

`14.1:` Aus `13.1`"$\Omega \in \phi^{-1}[A]$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\Gamma \in A) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in \phi)$.

`14.2:` Aus `13.2`"$\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$"
folgt via **341-2**: $\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$.

...

...

...

<u>Beweis **354-5**</u> `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \texttt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)\,) \wedge (\alpha \in n)$

...

$\boxed{\texttt{Thema9}}$ $\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)})$.

...

`15:` Aus `14.2`“$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A])$” und
aus `12`“$\ldots \beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha} \ldots$”
folgt via **folk**:
$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$.

`16:` Aus `15`“$\beta \setminus \{\Omega\}$
$\in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$” und
aus `7.3`“$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$
$\subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$”
folgt via **folk**: $\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$.

`17:` Aus `16`“$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$”
folgt via **folk**: $\exists \Phi : (\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in R(\alpha)$.

`18:` Aus `17`“$\ldots (\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in R(\alpha)$” und
aus `8.3`“$R(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times A$”
folgt via **folk**: $(\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times A$.

`19:` Aus `18`“$(\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \times A$”
folgt via **folk**: $\Phi \in A$.

`20:` Via **5-14** gilt: $\Omega \notin \beta \setminus \{\Omega\}$.

`21:` Aus →)“$\Box$ Algebra in A”,
aus `20`“$\Omega \notin \beta \setminus \{\Omega\}$”,
aus `17`“$(\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in R(\alpha)$”,
aus `14.1`“$\ldots (\Omega, \Gamma) \in \phi$”,
aus `19`“$\Phi \in A$” und
aus `14.1`“$\ldots \Gamma \in A \ldots$”
folgt via **353-2**:
$(\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi{\_}\Box{\_}\Gamma) \in \texttt{350.0}(R(\alpha), \phi, \Box)$.

...

...

. . .

Beweis **354-5** `b)` ...

`Thema6` $(\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)) \wedge (\alpha \in n)$

...

`Thema9` $\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)})$.

...

`22:` Aus `21` und
aus `8.4`
folgt: $(\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}), \Phi\_\Box\_\Gamma) \in R(1+\alpha)$.

`23:` Aus `22` "$(\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}), \Phi\_\Box\_\Gamma) \in R(1+\alpha)$"
folgt via **folk**:
$\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha))$.

`24:` Aus `23` und
aus `12` "$\ldots \beta = \{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\})$"
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha))$.

Ergo `Thema9`:
$\forall \beta : (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | "$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha))$"

`10:` Aus `A1` gleich "$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)})$
$\subseteq \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha))$" und
aus `8.1` "$1+\alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1+\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)$.

Ergo `Thema6`:

`A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)) \wedge (\alpha \in n))$
$\Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R))$"

...

Beweis **354-5** `b)` ...

`7:` Aus `1.1`“$n \in \mathbb{N}$”,
aus `5`“$0 \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)) \wedge (\alpha \in n))$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R))$”
folgt via **339-2**: $n \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)$.

`8:` Aus `7`“$n \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]), R)$”
folgt **p.def.**: $\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(n))$.

`9:` Aus →)“$\Box$ Algebra in A”,
aus →)“R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$” und
aus →)“$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-3**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`10:` Aus `9`“$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$” und
aus `8`“$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(n))$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

$\Box$

Maßtheorie: Über kanonische Fortsetzungen von A_Gewichten.

Ersterstellung: 13/07/15 **Letzte Änderung: 14/12/15**

355-1. Zur Einstimmung ein wenig Klassen-Algebra.

<u>**355-1(Satz)**</u>

a) $(x \setminus y) \cup (x \setminus z) = x \setminus (y \cap z)$.

b) $(x \setminus y) \setminus (x \setminus z) = (x \cap z) \setminus y$.

c) *Aus* "$z \subseteq x$" *folgt* "$(x \setminus y) \setminus (x \setminus z) = z \setminus y$".

d) $p \cap_{\mathtt{in}} D \subseteq \mathcal{P}(p)$.

e) $p \setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq \mathcal{P}(p)$.

f) $E \;_{\mathtt{ni}}\!\cap p \subseteq \mathcal{P}(p)$.

<u>Beweis **355-1**</u> a)

$$(x \setminus y) \cup (x \setminus z) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (x \cap y^C) \cup (x \setminus z) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (x \cap y^C) \cup (x \cap z^C) \stackrel{\text{DG}\cap\cup}{=} x \cap (y^C \cup z^C)$$
$$\stackrel{\textbf{DM}\cup\cap}{=} x \cap (y \cap z)^C \stackrel{\textbf{folk}}{=} x \setminus (y \cap z).$$

b)

$$(x \setminus y) \setminus (x \setminus z) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (x \cap y^C) \setminus (x \setminus z) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (x \cap y^C) \cap (x \setminus z)^C \stackrel{\textbf{5-10}}{=} (x \cap y^C) \cap (x^C \cup z)$$
$$\stackrel{\textbf{DG}\cap\cup}{=} ((x \cap y^C) \cap x^C) \cup ((x \cap y^C) \cap z) \stackrel{\textbf{KG}\cap}{=} (x^C \cap (x \cap y^C)) \cup ((x \cap y^C) \cap z)$$
$$\stackrel{\textbf{AG}\cap}{=} ((x^C \cap x) \cap y^C) \cup ((x \cap y^C) \cap z) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (0 \cap y^C) \cup ((x \cap y^C) \cap z)$$
$$\stackrel{\textbf{folk}}{=} 0 \cup ((x \cap y^C) \cap z) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (x \cap y^C) \cap z \stackrel{\textbf{KG}\cap}{=} z \cap (x \cap y^C) \stackrel{\textbf{folk}}{=} z \cap (x \setminus y)$$
$$\stackrel{\textbf{296-11}}{=} (z \cap x) \setminus y \stackrel{\textbf{KG}\cap}{=} (x \cap z) \setminus y.$$

c) VS gleich $z \subseteq x$.

1.1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $(x \setminus y) \setminus (x \setminus z) = (x \cap z) \setminus y$.

1.2: Aus VS gleich "$z \subseteq x$"
folgt via **folk**: $x \cap z = z$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $(x \setminus y) \setminus (x \setminus z) = z \setminus y$.

<u>Beweis **355-1**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in p \cap_{\texttt{in}} D.$
`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in p \cap_{\texttt{in}} D$” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in p \cap_{\texttt{in}} D$” folgt via **220-5**:	$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = p \cap \Omega).$
`3:` Via **folk** gilt:	$p \cap \Omega \subseteq p.$
`4:` Aus `3` und aus `2.2`“$\ldots \alpha = p \cap \Omega$” folgt:	$\alpha \subseteq p.$
`5:` Aus `4`“$\alpha \subseteq p$” und aus `2.1`“α Menge” folgt via **folk**:	$\alpha \in \mathcal{P}(p).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \cap_{\texttt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(p)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $p \cap_{\texttt{in}} D \subseteq \mathcal{P}(p).$

<u>Beweis **355-1**</u> `e)`

`Thema1` $\alpha \in p \setminus_{\texttt{in}} D.$

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in p \setminus_{\texttt{in}} D$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in p \setminus_{\texttt{in}} D$”
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = p \setminus \Omega).$

`3:` Via **folk** gilt: $p \setminus \Omega \subseteq p.$

`4:` Aus `3` und
aus `2.2`“$\ldots \alpha = p \setminus \Omega$”
folgt: $\alpha \subseteq p.$

`5:` Aus `4`“$\alpha \subseteq p$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}(p).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \setminus_{\texttt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(p)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $p \setminus_{\texttt{in}} D \subseteq \mathcal{P}(p).$

`f)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $p \cap_{\texttt{in}} E \subseteq \mathcal{P}(p).$

`1.2:` Via **220-7** gilt: $E \;_{\texttt{ni}}\!\cap p = p \cap_{\texttt{in}} E.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $E \;_{\texttt{ni}}\!\cap p \subseteq \mathcal{P}(p).$

□

355-2. Genervt von Fragen Studierender des EKs, ob es zuträfe, dass die Summe *aller* natürlicher Zahlen gleich $-1 : (12)$ - oder gleich einer ähnlich einfachen, rationalen, negativen Zahl sei - versuche ich hier, die Implikationen, die eine derartige Festlegung im Rahmen von AGewichten nach sich zöge. Um den Ball flach zu halten beschäftige ich mich hier mit AGewichten, die auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$ definiert sind und dort Werte aus $\mathbb{C}$ annehmen.

355-2(Satz)

`a)` *Aus "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und "$\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$"*
folgt "$\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$" Mengenring"
und "$\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) \subseteq \mathcal{P}(A)$".

`b)` *Aus "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und "$A \in \mathfrak{R}$" und "$E \subseteq \mathfrak{R}$"*
folgt "$E \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} E) \subseteq \mathfrak{R}$".

`c)` *Aus "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und "$A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$"*
folgt "$\mathfrak{R} \cap (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) = 0$"
und "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) \Rightarrow (0 \neq \alpha \cap \beta)$".

Beweis **355-2** `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R} \text{ Mengenring}) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

`Thema1.1` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$"
folgt via **folk**:
$$\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$$
$$\vee \quad (\alpha \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$$
$$\vee \quad (\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) \wedge (\beta \in \mathfrak{R})$$
$$\vee \quad \alpha, \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}.$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring ..." und
aus `2.1.Fall`"$\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-4(Def)**: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R}$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

...

Beweis **355-2** `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R}\text{ Mengenring}) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

...

`Thema1.1` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(\alpha \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$\alpha \in \mathfrak{R} \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$" folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}(A)$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$" folgt via **220-5**: A Menge.

`3.3:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$" folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta = A \setminus \Omega)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\alpha \in \mathcal{P}(A)$" folgt via **folk**: $\alpha \subseteq A$.

`4.2:` Aus `3.3` folgt: $\beta = A \setminus \Omega$.

`5.1:` Aus `4.1`"$\alpha \subseteq A$" folgt via **folk**: $\alpha \cup A = A$.

`5.2:` Aus `4.1`"$\alpha \subseteq A$" folgt via **261-5**: $A^C \cap \alpha = 0$.

`6.1:` $\alpha \cup \beta \stackrel{4.2}{=} \alpha \cup (A \setminus \Omega) \stackrel{\mathbf{folk}}{=} \alpha \cup (A \cap \Omega^C)$
$\stackrel{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} (\alpha \cup A) \cap (\alpha \cup \Omega^C) \stackrel{5.1}{=} A \cap (\alpha \cup \Omega^C)$
$\stackrel{\mathbf{DM}\cap\cup}{=} A \cap (\alpha^C \cap (\Omega^C)^C)^C \stackrel{\mathbf{3-4}}{=} A \cap (\alpha^C \cap \Omega)^C$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} A \cap (\Omega \cap \alpha^C)^C \stackrel{\mathbf{folk}}{=} A \cap (\Omega \setminus \alpha)^C \stackrel{\mathbf{folk}}{=} A \setminus (\Omega \setminus \alpha)$.

`6.2:` $\alpha \cap \beta^C \stackrel{4.2}{=} \alpha \cap (A \setminus \Omega)^C \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} \alpha \cap (A^C \cup \Omega)$
$\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (\alpha \cap A^C) \cup (\alpha \cap \Omega) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (A^C \cap \alpha) \cup (\alpha \cup \Omega)$
$\stackrel{5.2}{=} 0 \cup (\alpha \cup \Omega) \stackrel{\text{folk}}{=} \alpha \cup \Omega$.

...

...

...

<u>Beweis **355-2**</u> `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R} \text{ Mengenring}) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

`Thema1.1` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(\alpha \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`7.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring..." ,
aus `3.3`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$\alpha \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-6**: $\Omega \setminus \alpha \in \mathfrak{R}$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring..." ,
aus `2.2.Fall`"$\alpha \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `3.2`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-4(Def)**: $\alpha \cup \Omega \in \mathfrak{R}$.

`8.1:` Aus `3.2`"A Menge" und
aus `7.1`"$\Omega \setminus \alpha \in \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $A \setminus (\Omega \setminus \alpha) \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

`8.2:` Aus `6.2`"$\alpha \cap \beta^C = \ldots = \alpha \cup \Omega$" und
aus `7.2`
folgt: $\alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R}$.

`9.1:` Aus `6.1`"$\alpha \cup \beta = \ldots = A \setminus (\Omega \setminus \alpha)$" und
aus `8.1`
folgt: $\alpha \cup \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

`9.2:` Aus `8.2`"$\alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $\alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`10:` Aus `9.1`"$\alpha \cup \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $\alpha \cup \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`11:` Aus `10` und
aus `9.2`
folgt: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

...

<u>Beweis **355-2**</u> `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R}\text{ Mengenring})\wedge(\mathfrak{R}\subseteq\mathcal{P}(A))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha,\beta\in\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(\alpha\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})\wedge(\beta\in\mathfrak{R})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`“$\alpha\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$”
folgt via **220-5**: A Menge.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`“$\alpha\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$”
folgt via **220-5**: $\exists\Omega:(\Omega\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha=A\setminus\Omega)$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`“$\ldots\beta\in\mathfrak{R}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots\mathfrak{R}\subseteq\mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\beta\in\mathcal{P}(A)$.

`4.1:` Aus `3.2`
folgt: $\alpha=A\setminus\Omega$.

`4.2:` Aus `3.1`“$\alpha\in\mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\beta\subseteq A$.

`5.1:` Aus `4.2`“$\beta\subseteq A$”
folgt via **folk**: $A\cup\beta=A$.

`5.2:` Aus `4.2`“$\beta\subseteq A$”
folgt via **folk**: $A\cap\beta=\beta$.

`6.1:` $$\alpha\cup\beta\stackrel{4.1}{=}(A\setminus\Omega)\cup\beta\stackrel{\textbf{folk}}{=}(A\cap\Omega^C)\cup\beta\stackrel{\textbf{DG}\cup\cap}{=}(A\cup\beta)\cap(\Omega^C\cup\beta)\stackrel{5.1}{=}A\cap(\Omega^C\cup\beta)\stackrel{\textbf{3-4}}{=}A\cap(\Omega^C\cup(\beta^C)^C)\stackrel{\textbf{DM}\cap\cup}{=}A\cap((\Omega\cap\beta)^C)\stackrel{\textbf{folk}}{=}A\setminus(\Omega\cap\beta).$$

`6.2:` $$\alpha\cap\beta^C\stackrel{4.1}{=}(A\setminus\Omega)\cap\beta^C\stackrel{\textbf{folk}}{=}(A\setminus\Omega)\setminus\beta\stackrel{\textbf{5-12}}{=}A\setminus(\Omega\cup\beta).$$

...

...

...

Beweis **355-2** `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R}\text{ Mengenring}) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

...

`Thema1.1` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) \wedge (\beta \in \mathfrak{R})$.

...

`7.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring..." ,
aus `3.2`"... $\Omega \in \mathfrak{R}$ ..." und
aus `2.3.Fall`"... $\beta \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-6**: $\Omega \cap \beta \in \mathfrak{R}$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring..." ,
aus `3.2`"... $\Omega \in \mathfrak{R}$ ..." und
aus `2.3.Fall`"$\beta \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-4(Def)**: $\Omega \cup \beta \in \mathfrak{R}$.

`8.1:` Aus `3.1`"A Menge" und
aus `7.1`"$\Omega \cap \beta \in \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $A \setminus (\Omega \cap \beta) \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

`8.2:` Aus `3.1`"A Menge" und
aus `7.2`"$\Omega \cup \beta \in \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $A \setminus (\Omega \cup \beta) \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

`9.1:` Aus `6.1`"$\alpha \cup \beta = \ldots = A \setminus (\Omega \cap \beta)$" und
aus `8.1`
folgt: $\alpha \cup \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

`9.2:` Aus `6.2`"$\alpha \cap \beta^C = \ldots = A \setminus (\Omega \cup \beta)$" und
aus `8.2`
folgt: $\alpha \cap \beta^C \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

`10.1:` Aus `9.1`"$\alpha \cup \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $\alpha \cup \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`10.2:` Aus `9.2`"$\alpha \cap \beta^C \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $\alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

...

...

Beweis **355-2** `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R}\text{ Mengenring}) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

...

`Thema1.1` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) \wedge (\beta \in \mathfrak{R})$.

...

`11:` Aus `10.1` und
aus `10.2`
folgt: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`2.4.Fall` $\alpha, \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`"$\alpha \ldots \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: A Menge.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`"$\alpha, \ldots \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha = A \setminus \Omega)$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta = A \setminus \Phi)$.

`4.1:` Aus `3.2`
folgt: $\alpha = A \setminus \Omega$.

`4.2:` Aus `3.3`
folgt: $\beta = A \setminus \Phi$.

`4.3:` Aus `3.3`"$\ldots \Phi \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A) \ldots$"
folgt via **folk**: $\Phi \in \mathcal{P}(A)$.

`5:` Aus `4.3`"$\Phi \in \mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\Phi \subseteq A$.

`6:` Aus `5`"$\Phi \subseteq A$"
folgt via **355-1**: $(A \setminus \Omega) \setminus (A \setminus \Phi) = \Phi \setminus \Omega$.

...

...

...

<u>Beweis **355-2**</u> `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R} \text{ Mengenring}) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

...

`Thema1.1` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $\alpha, \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

...

`7.1:` $\alpha \cup \beta \stackrel{4.1}{=} (A \setminus \Omega) \cup \beta \stackrel{4.2}{=} (A \setminus \Omega) \cup (A \setminus \Phi) \stackrel{\mathbf{355-1}}{=} A \setminus (\Omega \cap \Phi)$.

`7.2:` $\alpha \cap \beta^C \stackrel{4.1}{=} (A \setminus \Omega) \cap \beta^C \stackrel{\mathbf{folk}}{=} (A \setminus \Omega) \setminus \beta \stackrel{4.2}{=} (A \setminus \Omega) \setminus (A \setminus \Phi) \stackrel{6}{=} \Phi \setminus \Omega$.

`8.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring..." ,
aus `3.2` "... $\Omega \in \mathfrak{R}$ ..." und
aus `3.3` "... $\Phi \in \mathfrak{R}$ ..."
folgt via **346-6**: $\Omega \cap \Phi \in \mathfrak{R}$.

`8.2:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring..." ,
aus `3.2` "... $\Omega \in \mathfrak{R}$ ..." und
aus `3.3` "... $\Phi \in \mathfrak{R}$ ..."
folgt via **346-6**: $\Phi \setminus \Omega \in \mathfrak{R}$.

`9.1:` Aus `3.1` "A Menge" und
aus `8.1` "$\Omega \cap \Phi \in \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $A \setminus (\Omega \cap \Phi) \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

`9.2:` Aus `7.2` "$\alpha \cap \beta^C = \ldots = \Phi \setminus \Omega$" und
aus `8.2`
folgt: $\alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R}$.

`10.1:` Aus `7.1` "$\alpha \cup \beta = \ldots = A \setminus (\Omega \cap \Phi)$" und
aus `9.1`
folgt: $\alpha \cup \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

`10.2:` Aus `9.2` "$\alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $\alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

...

<u>Beweis</u> **355-2** `a)` `VS` gleich $(\mathfrak{R} \text{ Mengenring}) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

...

`Thema1.1` $\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $\alpha, \beta \in A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

...

`11:` Aus `10.1`"$\alpha \cup \beta \in \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $\alpha \cup \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`12:` Aus `11` und
aus `10.2`
folgt: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})) \Rightarrow (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})).$$

Konsequenz via **346-6(Def)**: `A1` | "$\mathfrak{R} \cup (A \setminus \mathfrak{R})$ Mengenring"

`1.2:` Via **355-1** gilt: $A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$" und
aus `1.2`"$A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$"

folgt via **folk**: $\boxed{\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) \subseteq \mathcal{P}(A)}$

<u>Beweis **355-2**</u> `b)` `VS` gleich $(\mathfrak{R}\text{ Mengenring}) \wedge (E \subseteq \mathfrak{R}) \wedge (A \in \mathfrak{R})$.

`Thema1` $\alpha \in E \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} E)$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in E \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} E)$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in E) \vee (\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} E)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in E$.

Aus `2.1.Fall` "$\alpha \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathfrak{R}$.

`2.2.Fall` $\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} E$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} E$"
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = A \setminus \Omega)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathfrak{R}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring…",
aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathfrak{R}$" und
aus `4` "$\Omega \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-6**: $A \setminus \Omega \in \mathfrak{R}$.

`6:` Aus `3` "$\ldots \alpha = A \setminus \Omega$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \mathfrak{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} E)) \Rightarrow (\alpha \in \mathfrak{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} E) \subseteq \mathfrak{R}$.

<u>Beweis **355-2**</u> `c)` `VS` gleich $(\mathfrak{R}\text{ Mengenring}) \wedge (A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathfrak{R} \cap (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathfrak{R} \cap (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha = A \setminus \Omega)$.

`4.1:` Aus `3` "$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathcal{P}(A)$.

`4.2:` Aus `2` "$\alpha \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `3` "$\ldots \alpha = A \setminus \Omega$"
folgt: $A \setminus \Omega \in \mathfrak{R}$.

`5.1:` Aus `4.1` "$\Omega \in \mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\Omega \subseteq A$.

`5.2:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring…",
aus `3` "$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `4.2` "$A \setminus \Omega \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-4(Def)**: $\Omega \cup (A \setminus \Omega) \in \mathfrak{R}$.

`6:` Aus `5.1` "$\Omega \subseteq A$"
folgt via **258-32**: $\Omega \cup (A \setminus \Omega) = A$.

`7:` Aus `6` und
aus `5.2`
folgt: $A \in \mathfrak{R}$.

`8:` Nach `VS` gilt: $A \notin \mathfrak{R}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{R} \cap (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})) \Rightarrow (\alpha \notin \mathfrak{R} \cap (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}))$.

Konsequenz via **folk**: $\boxed{\mathfrak{R} \cap (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}) = 0}$

…

<u>Beweis **355-2**</u> `c)` `VS` gleich $(\mathfrak{R} \text{ Mengenring}) \wedge (A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha, \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \ldots \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha = A \setminus \Omega)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta = A \setminus \Phi)$.

`3:` Aus `2.1`"$\ldots \alpha = A \setminus \Omega$" und
aus `2.2`"$\ldots \beta = A \setminus \Phi$"
folgt: $\alpha \cap \beta = (A \setminus \Omega) \cap (A \setminus \Phi)$.

`4:` Via **355-1** gilt: $(A \setminus \Omega) \cap (A \setminus \Phi) = A \setminus (\Omega \cup \Phi)$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring..." ,
aus `2.1`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots \Phi \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-4(Def)**: $\Omega \cup \Phi \in \mathfrak{R}$.

`6.1:` Aus `5`"$\Omega \cup \Phi \in \mathfrak{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\Omega \cup \Phi \in \mathcal{P}(A)$.

`6.2:` Aus `5`"$\Omega \cup \Phi \in \mathfrak{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A \notin \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $\Omega \cup \Phi \neq A$.

`7:` Aus `6`"$\Omega \cup \Phi \in \mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\Omega \cup \Phi \subseteq A$.

`8:` Aus `6.2`"$\Omega \cup \Phi \neq A$" und
aus `7`"$\Omega \cup \Phi \subseteq A$"
folgt via **0-10**: $A \not\subseteq \Omega \cup \Phi$.

`9:` Aus `8`"$A \not\subseteq \Omega \cup \Phi$"
folgt via **5-7**: $0 \neq A \setminus (\Omega \cup \Phi)$.

...

...

<u>Beweis **355-2**</u> `c)` `VS` gleich $(\mathfrak{R} \text{ Mengenring}) \wedge (A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha, \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

...

`10:` Aus `9` und
aus `4`
folgt: $0 \neq (A \setminus \Omega) \cap (A \setminus \Phi)$.

`11:` Aus `10` und
aus `3`
folgt: $0 \neq \alpha \cap \beta$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}) \Rightarrow (0 \neq \alpha \cap \beta)}$

$\square$

355-3. Als erfrischendes Zwischenspiel soll weiter Klassen-Algebra betrieben werden.

<u>**355-3(Satz)**</u>

a) $(x \setminus y) \cup z = (x \cup z) \setminus (y \setminus z)$.

b) *Aus* "$z \subseteq x$" *folgt* "$(x \setminus y) \cup z = x \setminus (y \setminus z)$".

c) "$E \setminus x = E \setminus y$" *genau dann, wenn* "$E \cap x = E \cap y$".

d) *Aus* "$x, y \subseteq E$" *und* "$E \setminus x = E \setminus y$" *folgt* "$x = y$".

e) *Aus* "$x \cap (y \setminus z) = 0$" *und* "$x \subseteq y$" *folgt* "$x \subseteq z$".

f) "$x \subseteq y$" *genau dann, wenn* "$x \setminus (x \setminus y) = x$" *genau dann, wenn* "$y \setminus (y \setminus x) = x$".

<u>Beweis **355-3**</u> `a)`

$$(x \setminus y) \cup z \overset{\textbf{folk}}{=} (x \cap y^C) \cup z \overset{\textbf{DG}\cup\cap}{=} (x \cup z) \cap (y^C \cup z) \overset{\textbf{3-4}}{=} (x \cup z) \cap (y^C \cup (z^C)^C)$$
$$\overset{\textbf{DM}\cap\cup}{=} (x \cup z) \cap (y \cap z^C)^C \overset{\textbf{folk}}{=} (x \cup z) \setminus (y \cap z^C) \overset{\textbf{folk}}{=} (x \cup z) \setminus (y \setminus z).$$

`b)` `VS` gleich $z \subseteq x$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x \setminus y) \cup z = (x \cup z) \setminus (y \setminus z)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$z \subseteq x$" folgt via **folk**: $x \cup z = x$.

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt: $(x \setminus y) \cup z = x \setminus (y \setminus z)$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $E \setminus x = E \setminus y$.

$$E \cap x \overset{\textbf{344-11}}{=} E \setminus (E \setminus x) \overset{\texttt{VS}}{=} E \setminus (E \setminus y) \overset{\textbf{344-11}}{=} E \cap y.$$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $E \cap x = E \cap y$.

$$E \setminus x \overset{\textbf{5-10}}{=} E \setminus (E \cap x) \overset{\texttt{VS}}{=} E \setminus (E \cap y) \overset{\textbf{5-10}}{=} E \setminus y.$$

<u>Beweis **355-3**</u> `d)` `VS` gleich $$(x, y \subseteq E) \wedge (E \setminus x = E \setminus y).$$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \subseteq E \ldots$"
folgt via **folk**: $$E \cap x = x.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq E \ldots$"
folgt via **folk**: $$E \cap y = y.$$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \setminus x = E \setminus y$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $$E \cap x = E \cap y.$$

`2:` Aus `1.3`,
aus `1.1` und
aus `1.3`
folgt: $$x = y.$$

`e)` `VS` gleich $$(x \cap (y \setminus z) = 0) \wedge (x \subseteq y).$$

`1:` Aus `VS`
folgt: $$x \cap (y \setminus z) = 0.$$

`2:` $$0 \stackrel{1.1}{=} x \cap (y \setminus z) \stackrel{\mathbf{296-11}}{=} (x \cap y) \setminus z.$$

`3:` Aus 2"$0 = \ldots = (x \cap y) \setminus z$"
folgt via **5-6**: $$x \cap y \subseteq z.$$

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y$"
folgt via **folk**: $$x \cap y = x.$$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $$x \subseteq z.$$

<u>Beweis</u> **355-3** `f)`

`1.1:` Via **folk** gilt: $$(x \subseteq y) \Leftrightarrow (x \cap y = x).$$

`1.2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $$x \cap y = y \cap x.$$

`2.1:` Via **344-11** gilt: $$x \setminus (x \setminus y) = x \cap y.$$

`2.2:` Aus ta1.1 und
aus `1.2`
folgt: $$(x \subseteq y) \Leftrightarrow (y \cap x = x).$$

`2.3:` Via **344-11** gilt: $$y \setminus (y \setminus x) = y \cap x.$$

`3.1:` Aus `1.1` und
aus `2.1`
folgt: $$\boxed{(x \subseteq y) \Leftrightarrow (x \setminus (x \setminus y) = x)}$$

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $$(x \subseteq y) \Leftrightarrow (y \setminus (y \setminus x) = x).$$

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $$\boxed{(x \setminus (x \setminus y) = x) \Leftrightarrow (y \setminus (y \setminus x) = x)}$$

$\square$

355-4. Ist p eine Unmenge, so sind $p \cup_{\mathtt{in}} D$, $p \setminus_{\mathtt{in}} D$ und $D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup p$ leer.

<u>**355-4(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) *p Unmenge.*

Dann folgt:

a) $p \cup_{\mathtt{in}} D = 0$

b) $p \setminus_{\mathtt{in}} D = 0$.

c) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup p = 0$.

Beweis **355-4** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in p \cup_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in p \cup_{\mathtt{in}} D$"
folgt via **220-5**: p Menge.

`3:` Nach $\rightarrow$) gilt: p Unmenge.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \cup_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \notin p \cup_{\mathtt{in}} D).$

Konsequenz via **folk**: $p \cup_{\mathtt{in}} D = 0.$

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in p \setminus_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in p \setminus_{\mathtt{in}} D$"
folgt via **220-5**: p Menge.

`3:` Nach $\rightarrow$) gilt: p Unmenge.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \setminus_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \notin p \setminus_{\mathtt{in}} D).$

Konsequenz via **folk**: $p \setminus_{\mathtt{in}} D = 0.$

`c)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \cup_{\mathtt{in}} E = 0.$

`1.2:` Via **220-7** gilt: $E \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup p = p \cup_{\mathtt{in}} E.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $E \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup p = 0.$

□

355-5. Ist $\mathfrak{R}$ ein Mengenring mit $\Box$_Gewicht ϕ und ist $A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$, so kann ϕ an Hand vorliegender Kriteriums zu einem $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$ fortgesetzt werden.

355-5(Satz) *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) ϕ *ist* $\Box$*_Gewicht auf* $\mathfrak{R} = \mathsf{dom}\,\phi$.

$\rightarrow$) $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

$\rightarrow$) $A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

$\rightarrow$) ψ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,\psi = A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\phi \cup \psi$ *ist* $\Box$*_Gewicht auf* $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`ii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$

$$\Rightarrow \qquad \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta).$$

`ALG`-**Notation**.

Beweis **355-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\qquad \phi \cup \psi$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

1: Es gilt: $(A \text{ Menge}) \vee (A \text{ Unmenge})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ A Menge.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

3.1: Aus Thema1"$\ldots \alpha \subseteq \beta$"
folgt via **313-3**: $\alpha \cap (A \setminus \beta) = 0$.

3.2: Aus 1.1.Fall"A Menge" und
aus Thema2"$\ldots \beta \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **220-5**: $A \setminus \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

3.3: Aus Thema2"$\alpha \ldots \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

3.4: Aus →)"$\mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus →)"$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$"
folgt via **355-2**: $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$ Mengenring.

4.1: Via **KG**$\cap$ gilt: $(A \setminus \beta) \cap \alpha = \alpha \cap (A \setminus \beta)$.

4.2: Aus 3.2"$A \setminus \beta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **folk**: $A \setminus \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

5.1: Aus 4.1 und
aus 3.1
folgt: $(A \setminus \beta) \cap \alpha = 0$.

5.2: Aus 3.4"$\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$ Mengenring",
aus 3.3"$\alpha \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$" und
aus 4.2"$A \setminus \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$"
folgt via **346-6**: $\alpha \cup (A \setminus \beta) \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

...

...

Beweis **355-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` A Menge

...

`Thema2` $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

...

`6.1:` Aus VS gleich "$\phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$",
aus `3.3` "$\alpha \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$",
aus `4.2` "$A \setminus \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$",
aus `5.2` "$\alpha \cup (A \setminus \beta) \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$" und
aus `5.1` "$(A \setminus \beta) \cap \alpha = 0$"
folgt via **346-1(Def)**:
$(\phi \cup \psi)((A \setminus \beta) \cup \alpha) = (\phi \cup \psi)(A \setminus \beta)\_\Box\_(\phi \cup \psi)(\alpha)$.

`6.2:` Aus VS gleich "$\phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$",
aus `3.3` "$\alpha \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$",
aus `4.2` "$A \setminus \beta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$",
aus `5.2` "$\alpha \cup (A \setminus \beta) \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$" und
aus `5.1` "$(A \setminus \beta) \cap \alpha = 0$"
folgt via **346-3**:

$$(\phi \cup \psi)(A \setminus \beta)\_\Box\_(\phi \cup \psi)(\alpha) = (\phi \cup \psi)(\alpha)\_\Box\_(\phi \cup \psi)(A \setminus \beta).$$

...

...

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` A Menge

...

`Thema2` $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

...

`7.1:` Aus `Thema2` "$\alpha \ldots \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus →) "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}(A)$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$\phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi \cup \psi$ Funktion.

`7.3:` Aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

`7.4:` Aus `Thema2` "$\alpha \ldots \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus →) "$\ldots \mathfrak{R} = \mathsf{dom}\, \phi$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\, \phi$.

`7.5:` Aus `3.2` und
aus →) "$\mathsf{dom}\, \psi = A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt: $A \setminus \beta \in \mathsf{dom}\, \psi$.

`7.6:` Aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt:
$$(\phi \cup \psi)((A \setminus \beta) \cup \alpha) = (\phi \cup \psi)(A \setminus \beta)\_\Box\_(\phi \cup \psi)(\alpha)$$
$$= (\phi \cup \psi)(\alpha)\_\Box\_(\phi \cup \psi)(A \setminus \beta).$$

...

...

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` A Menge

...

`Thema2` $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

...

`8.1:` Aus `7.3`"ϕ Funktion",
aus `7.2`"$\phi \cup \psi$ Funktion" und
aus `7.4`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **259-38**: $(\phi \cup \psi)(\alpha) = \phi(\alpha)$.

`8.2:` Aus →) "ψ Funktion",
aus `7.2`"$\phi \cup \psi$ Funktion" und
aus `7.5`"$A \setminus \beta \in \mathsf{dom}\,\psi$"
folgt via **343-9**: $(\phi \cup \psi)(A \setminus \beta) = \psi(\beta)$.

`8.3:` Aus `7.1`"$\alpha \in \mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\alpha \subseteq A$.

`9.1:` Aus `7.6`,
aus `8.1` und
aus `8.2`
folgt:
$$(\phi \cup \psi)((A \setminus \beta) \cup \alpha) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta).$$

`9.2:` Aus `8.3`"$\alpha \subseteq A$"
folgt via **355-3**: $(A \setminus \beta) \cup \alpha = A \setminus (\beta \setminus \alpha)$.

`10.1:` Aus `9.1` und
aus `9.2`
folgt: $(\phi \cup \psi)(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

`10.2:` Aus →) "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus `Thema2`"$\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-6**: $\beta \setminus \alpha \in \mathfrak{R}$.

...

...

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\qquad \phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad A$ Menge

...

`Thema2` $\qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

...

`11:` Aus `1.1.Fall`“A Menge” und
aus `10.2`“$\beta \setminus \alpha \in \mathfrak{R}$”
folgt via **220-5**: $\qquad A \setminus (\beta \setminus \alpha) \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

`12:` Aus `11` und
aus →) “$\mathsf{dom}\, \psi = A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$”
folgt: $\qquad A \setminus (\beta \setminus \alpha) \in \mathsf{dom}\, \psi$.

`13:` Aus →) “ψ Funktion”,
aus `7.2`“$\phi \cup \psi$ Funktion” und
aus `12`“$A \setminus (\beta \setminus \alpha) \in \mathsf{dom}\, \psi$”
folgt via **343-9**:

$$(\phi \cup \psi)(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)).$$

`14:` Aus `9.1` und
aus `13`
folgt:

$$\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta).$$

Ergo `Thema2`:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)) \quad \Rightarrow \quad \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta).$$

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\qquad \phi \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\qquad$ A Unmenge

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

3: Aus 1.2.Fall"A Unmenge"
folgt via **355-4**: $\qquad A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R} = 0$.

4: Aus →) "$\mathsf{dom}\, \psi = A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$" und
aus 3
folgt: $\qquad \mathsf{dom}\, \psi = 0$.

5: Aus →) "ψ Funktion" und
aus 4"$\mathsf{dom}\, \psi = 0$"
folgt via **92-5**: $\qquad \psi = 0$.

6.1: $\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) \stackrel{5}{=} 0(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) \stackrel{\mathbf{17-7}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\phi(\alpha)$
$\stackrel{\mathbf{17-7}}{=} 0(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) \stackrel{5}{=} \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha)$.

6.2: $\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) \stackrel{5}{=} 0(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) \stackrel{\mathbf{17-7}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \phi(\alpha)\_\Box\,\mathcal{U}$
$\stackrel{\mathbf{17-7}}{=} \phi(\alpha)\_\Box\_0(A \setminus \beta) \stackrel{5}{=} \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

7: Aus 6.1 und
aus 6.2
folgt: $\qquad \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha)$
$= \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

Ergo Thema2:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow \qquad \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow \qquad \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha\subseteq\beta))$
$\Rightarrow (\psi(A\setminus(\beta\setminus\alpha)) = \psi(A\setminus\beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A\setminus\beta))$.

`0.1:` Aus →) “ϕ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathfrak{R}\ldots$”
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

`0.2:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus →) “$A\notin\mathfrak{R}\subseteq\mathcal{P}(A)$”
folgt via **355-2**: $\mathfrak{R}\cap(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}) = 0$.

`1:` Aus →) “$\ldots\mathfrak{R} = \mathsf{dom}\,\phi$”,
aus →) “$\mathsf{dom}\,\psi = A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$” und
aus `1.2`
folgt: $(\mathsf{dom}\,\phi)\cap(\mathsf{dom}\,\psi) = 0$.

`2:` Aus `1.1`“ϕ Funktion”,
aus →) “ψ Funktion” und
aus 2“$(\mathsf{dom}\,\phi)\cap(\mathsf{dom}\,\psi) = 0$”
folgt via **18-42**: $\phi\cup\psi$ Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\gamma,\delta,\delta\cup\gamma\in\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}))\wedge(\gamma\cap\delta = 0)$.

`4:` Aus `Thema4`“$\gamma,\delta\ldots\in\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})\ldots$”
folgt via **folk**:

$$\begin{aligned} & \gamma,\delta\in\mathfrak{R} \\ \vee\quad & (\gamma\in\mathfrak{R})\wedge(\delta\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}) \\ \vee\quad & (\gamma\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})\wedge(\delta\in\mathfrak{R}) \\ \vee\quad & \gamma,\delta\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}. \end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\gamma, \delta, \delta \cup \gamma \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{4.1.Fall}}$ $\gamma, \delta \in \mathfrak{R}$.

`5:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring. . . ” und
aus `4.1.Fall`“$\gamma, \delta \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-6(Def)**: $\gamma \cup \delta \in \mathfrak{R}$.

`6.1:` Aus →) “ϕ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathfrak{R}$ . . . ” ,
aus `4.1.Fall`“$\gamma, \delta \in \mathfrak{R}$” ,
aus `5`“$\gamma \cup \delta \in \mathfrak{R}$” und
aus `Thema4`“$\ldots \gamma \cap \delta = 0$”
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(\gamma \cup \delta) = \phi(\gamma)\_\Box\_\phi(\delta)$.

`6.2:` Aus `4.1.Fall`“$\gamma, \delta \in \mathfrak{R}$” und
aus →) “$\ldots \mathfrak{R} = \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt: $\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, \phi$.

`6.3:` Aus `5`“$\gamma \cup \delta \in \mathfrak{R}$” und
aus →) “$\ldots \mathfrak{R} = \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt: $\gamma \cup \delta \in \mathsf{dom}\, \phi$.

`7.1:` Aus `0.1`“ϕ Funktion” ,
aus `2`“$\phi \cup \psi$ Funktion” und
aus `6.2`“$\gamma \ldots \in \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt via **259-38**: $(\phi \cup \psi)(\gamma) = \phi(\gamma)$.

`7.2:` Aus `0.1`“ϕ Funktion” ,
aus `2`“$\phi \cup \psi$ Funktion” und
aus `6.2`“$\ldots \delta \in \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt via **259-38**: $(\phi \cup \psi)(\delta) = \phi(\delta)$.

`7.3:` Aus `0.1`“ϕ Funktion” ,
aus `2`“$\phi \cup \psi$ Funktion” und
aus `6.3`“$\gamma \cup \delta \in \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt via **259-38**: $(\phi \cup \psi)(\gamma \cup \delta) = \phi(\gamma \cup \delta)$.

...

...

...

Beweis **355-5** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha\subseteq\beta))$
$\Rightarrow(\psi(A\setminus(\beta\setminus\alpha))=\psi(A\setminus\beta)\_\square\_\phi(\alpha))=\phi(\alpha)\_\square\_\psi(A\setminus\beta)$.

...

`Thema3` $(\gamma,\delta,\delta\cup\gamma\in\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}))\wedge(\gamma\cap\delta=0)$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\gamma,\delta\in\mathfrak{R}$.

...

`8:` Aus `6.1`,
aus `7.1`,
aus `7.2` und
aus `7.3`
folgt: $(\phi\cup\psi)(\gamma\cup\delta)=(\phi\cup\psi)(\gamma)\_\square\_(\phi\cup\psi)(\delta)$.

`4.2.Fall` $(\gamma\in\mathfrak{R})\wedge(\delta\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})$.

`5:` Aus `4.2.Fall`"$\ldots\delta\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**:
$(A\text{ Menge})\wedge(\exists\Omega:(\Omega\in\mathfrak{R})\wedge(\delta=A\setminus\Omega))$.

`6.1:` Aus `4.2.Fall`"$\gamma\in\mathfrak{R}\ldots$" und
aus →)"$\ldots\mathfrak{R}\subseteq\mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\gamma\in\mathcal{P}(A)$.

`6.2:` Aus `Thema4`"$\ldots\gamma\cap\delta=0$" und
aus `5`"$\ldots\delta=A\setminus\Omega$"
folgt: $\gamma\cap(A\setminus\Omega)=0$.

`7:` Aus `6.1`"$\gamma\in\mathcal{P}(A)$"
folgt via **folk**: $\gamma\subseteq A$.

`8.1:` Aus `7`"$\gamma\subseteq A$"
folgt via **355-3**: $(A\setminus\Omega)\cup\gamma=A\setminus(\Omega\setminus\gamma)$.

`8.2:` Aus `6.2`"$\gamma\cap(A\setminus\Omega)=0$" und
aus `7`"$\gamma\subseteq A$"
folgt via **355-3**: $\gamma\subseteq\Omega$.

...

...

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\gamma, \delta, \delta \cup \gamma \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $(\gamma \in \mathfrak{R}) \wedge (\delta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

`9:` Aus `4.2.Fall`"$\gamma \in \mathfrak{R} \ldots$",
aus `5`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$",
aus `8.2`"$\gamma \subseteq \Omega$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha)$
$= \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta))$"
folgt: $\psi(A \setminus (\Omega \setminus \gamma)) = \phi(\gamma)\_\Box\_\psi(A \setminus \Omega)$.

`10.1:` Aus `5`
folgt: $\delta = A \setminus \Omega$.

`10.2:` Aus →) "$\mathfrak{R}$ Mengenring",
aus `5`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `4.2.Fall`"$\gamma \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-6**: $\Omega \setminus \gamma \in \mathfrak{R}$.

`10.3:` Aus `4.2.Fall`"$\gamma \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus →) "$\ldots \mathfrak{R} = \mathsf{dom}\, \phi$"
folgt: $\gamma \in \mathsf{dom}\, \phi$.

`10.4:` Aus `4.2.Fall`"$\ldots \delta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, \psi = A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt: $\delta \in \mathsf{dom}\, \psi$.

...

...

...

Beweis **355-5** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha\subseteq\beta))$
$\Rightarrow (\psi(A\setminus(\beta\setminus\alpha)) = \psi(A\setminus\beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A\setminus\beta))$.

...

Thema3 $(\gamma,\delta,\delta\cup\gamma\in\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}))\wedge(\gamma\cap\delta=0)$.

...

Fallunterscheidung

...

4.2.Fall $(\gamma\in\mathfrak{R})\wedge(\delta\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})$.

...

11.1: Aus 5"A Menge..." und
aus 10.2"$\Omega\setminus\gamma\in\mathfrak{R}$"
folgt via **220-5**: $A\setminus(\Omega\setminus\gamma)\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$.

11.2: Aus 0.1"ϕ Funktion",
aus 2"$\phi\cup\psi$ Funktion" und
aus 10.3"$\gamma\in\mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **259-38**: $(\phi\cup\psi)(\gamma)=\phi(\gamma)$.

11.3: Aus →)"ψ Funktion",
aus 2"$\phi\cup\psi$ Funktion" und
aus 10.4"$\delta\in\mathsf{dom}\,\psi$"
folgt via **343-9**: $(\phi\cup\psi)(\delta)=\psi(\delta)$.

12: Aus →)"$\mathsf{dom}\,\psi = A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$" und
aus 11.1
folgt: $A\setminus(\Omega\setminus\gamma)\in\mathsf{dom}\,\psi$.

13: Aus →)"ψ Funktion",
aus 2"$\phi\cup\psi$ Funktion" und
aus 12"$A\setminus(\Omega\setminus\gamma)\in\mathsf{dom}\,\psi$"
folgt via **343-9**:
$(\phi\cup\psi)(A\setminus(\Omega\setminus\gamma))=\psi(A\setminus(\Omega\setminus\gamma))$.

14: $(\phi\cup\psi)(\gamma\cup\delta)\overset{10.1}{=}(\phi\cup\psi)(\gamma\cup(A\setminus\Omega))$
$\overset{\mathbf{KG}\cup}{=}(\phi\cup\psi)((A\setminus\Omega)\cup\gamma)\overset{8.1}{=}(\phi\cup\psi)(A\setminus(\Omega\setminus\gamma))$
$\overset{13}{=}\psi(A\setminus(\Omega\setminus\gamma))\overset{9}{=}\phi(\gamma)\_\Box\_\psi(A\setminus\Omega)\overset{10.1}{=}\phi(\gamma)\_\Box\_\psi(\delta)$
$\overset{11.2}{=}(\phi\cup\psi)(\gamma)\_\Box\_\psi(\delta)\overset{11.3}{=}(\phi\cup\psi)(\gamma)\_\Box\_(\phi\cup\psi)(\delta)$.

15: Aus 14
folgt: $(\phi\cup\psi)(\gamma\cup\delta)=(\phi\cup\psi)(\gamma)\_\Box\_(\phi\cup\psi)(\delta)$.

...

...

Beweis **355-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\gamma, \delta, \delta \cup \gamma \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.3.Fall}}$ $(\gamma \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}) \wedge (\delta \in \mathfrak{R})$.

`5:` Aus `4.3.Fall`“$\gamma \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R} \ldots$”
folgt via **220-5**:
$(A \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{R}) \wedge (\gamma = A \setminus \Omega))$.

`6.1:` Aus `4.3.Fall`“$\ldots \delta \in \mathfrak{R}$” und
aus →)“$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\delta \in \mathcal{P}(A)$.

`6.2:` Aus `Thema4`“$\ldots \gamma \cap \delta = 0$” und
aus `5`“$\ldots \gamma = A \setminus \Omega$”
folgt: $(A \setminus \Omega) \cap \delta = 0$.

`7.1:` Aus `6.1`“$\delta \in \mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\delta \subseteq A$.

`7.2:` $\delta \cap (A \setminus \Omega) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (A \setminus \Omega) \cap \delta \stackrel{\texttt{6.2}}{=} 0$.

`8.1:` Aus `7.1`“$\delta \subseteq A$”
folgt via **355-3**: $(A \setminus \Omega) \cup \delta = A \setminus (\Omega \setminus \delta)$.

`8.2:` Aus `7.2`“$\delta \cap (A \setminus \Omega) = \ldots = 0$” und
aus `7.1`“$\delta \subseteq A$”
folgt via **355-3**: $\delta \subseteq \Omega$.

`9:` Aus `4.3.Fall`“$\ldots \delta \in \mathfrak{R}$”,
aus `5`“$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$”,
aus `8.2`“$\delta \subseteq \Omega$” und
aus `VS` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha)$
$= \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta))$”
folgt: $\psi(A \setminus (\Omega \setminus \delta)) = \psi(A \setminus \Omega)\_\Box\_\phi(\delta)$.

...

...

...

Beweis **355-5** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha\subseteq\beta))$
$\Rightarrow (\psi(A\setminus(\beta\setminus\alpha)) = \psi(A\setminus\beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A\setminus\beta))$.

...

`Thema3` $(\gamma,\delta,\delta\cup\gamma\in\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}))\wedge(\gamma\cap\delta=0)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.3.Fall` $(\gamma\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})\wedge(\delta\in\mathfrak{R})$.

...

`10.1:` Aus `5`
folgt: $\gamma = A\setminus\Omega$.

`10.2:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring”,
aus `5`“$\ldots\Omega\in\mathfrak{R}\ldots$” und
aus `4.3.Fall`“$\delta\in\mathfrak{R}\ldots$”
folgt via **346-6**: $\Omega\setminus\delta\in\mathfrak{R}$.

`10.3:` Aus `4.3.Fall`“$\gamma\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}\ldots$” und
aus →) “$\mathsf{dom}\,\psi = A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$”
folgt: $\gamma\in\mathsf{dom}\,\psi$.

`10.4:` Aus `4.3.Fall`“$\ldots\delta\in\mathfrak{R}$” und
aus →) “$\ldots\mathfrak{R} = \mathsf{dom}\,\phi$”
folgt: $\delta\in\mathsf{dom}\,\phi$.

`11.1:` Aus `5`“A Menge...” und
aus `10.2`“$\Omega\setminus\delta\in\mathfrak{R}$”
folgt via **220-5**: $A\setminus(\Omega\setminus\delta)\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$.

`11.2:` Aus →) “ψ Funktion”,
aus `2`“$\phi\cup\psi$ Funktion” und
aus `10.3`“$\gamma\in\mathsf{dom}\,\psi$”
folgt via **343-9**: $(\phi\cup\psi)(\gamma) = \psi(\gamma)$.

`11.3:` Aus `0.1`“ϕ Funktion”,
aus `2`“$\phi\cup\psi$ Funktion” und
aus `10.4`“$\delta\in\mathsf{dom}\,\phi$”
folgt via **259-38**: $(\phi\cup\psi)(\delta) = \phi(\delta)$.

...

...

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha\subseteq\beta))$
$\Rightarrow (\psi(A\setminus(\beta\setminus\alpha)) = \psi(A\setminus\beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A\setminus\beta)).$

...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\gamma,\delta,\delta\cup\gamma\in\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}))\wedge(\gamma\cap\delta=0).$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.3.Fall}}$ $(\gamma\in A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})\wedge(\delta\in\mathfrak{R}).$

...

12: Aus →) “$\mathsf{dom}\,\psi = A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$” und
aus 11.1
folgt: $A\setminus(\Omega\setminus\delta)\in\mathsf{dom}\,\psi.$

13: Aus →) “ψ Funktion”,
aus 2 “$\phi\cup\psi$ Funktion” und
aus 12 “$A\setminus(\Omega\setminus\delta)\in\mathsf{dom}\,\psi$”
folgt via **343-9**:
$$(\phi\cup\psi)(A\setminus(\Omega\setminus\delta)) = \psi(A\setminus(\Omega\setminus\delta)).$$

14: $$(\phi\cup\psi)(\gamma\cup\delta) \stackrel{10.1}{=} (\phi\cup\psi)((A\setminus\Omega)\cup\delta) \stackrel{8.1}{=} (\phi\cup\psi)(A\setminus(\Omega\setminus\delta))$$
$$\stackrel{13}{=} \psi(A\setminus(\Omega\setminus\delta)) \stackrel{9}{=} \psi(A\setminus\Omega)\_\Box\_\phi(\delta) \stackrel{10.1}{=} \psi(\gamma)\_\Box\_\phi(\delta)$$
$$\stackrel{11.2}{=} (\phi\cup\psi)(\gamma)\_\Box\_\phi(\delta) \stackrel{11.3}{=} (\phi\cup\psi)(\gamma)\_\Box\_(\phi\cup\psi)(\delta).$$

15: Aus 14
folgt: $(\phi\cup\psi)(\gamma\cup\delta) = (\phi\cup\psi)(\gamma)\_\Box\_(\phi\cup\psi)(\delta).$

...

<u>Beweis **355-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\square\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\square\_\psi(A \setminus \beta))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\gamma, \delta, \delta \cup \gamma \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.4.Fall}}$ $\gamma, \delta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

`5:` Aus `Thema4`"$\gamma, \delta \ldots \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}) \ldots$"
folgt via **folk**: $\gamma, \delta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$.

`6:` Aus →) "$\mathfrak{R}$ Mengenring",
aus →) "$A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$" und
aus 5"$\gamma, \delta \in A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R}$"
folgt via **355-2**: $0 \neq \gamma \cap \delta$.

`7:` Nach `Thema4` gilt: $\gamma \cap \delta = 0$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:
$(\phi \cup \psi)(\gamma \cup \delta) = (\phi \cup \psi)(\gamma)\_\square\_(\phi \cup \psi)(\delta)$.

Ergo `Thema3`:

`A1` "$\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$
$\Rightarrow \quad (\phi \cup \psi)(\gamma \cup \delta) = (\phi \cup \psi)(\gamma)\_\square\_(\phi \cup \psi)(\delta)$"

`5:` Aus 2"$\phi \cup \psi$ Funktion" und
aus `A1`"$\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$
$\Rightarrow ((\phi \cup \psi)(\gamma \cup \delta) = (\phi \cup \psi)(\gamma)\_\square\_(\phi \cup \psi)(\delta))$"
folgt via **346-1(Def)**:
$\phi \cup \psi$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

$\square$

355-6. Auf dem Weg zu Realisierungen von ψ wie in **355-5** ist es hilfreich, von einer Abkürzung Gebrauch zu machen.

355-6(Definition)

$$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) \ = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D).$$

355-7. Zunächst soll $\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$ theoretisch untersucht werden.

355-7(Satz)

a) $\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$ *Relation.*

b) *Aus* "$w \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$" *folgt* "$\xi$ *Zahl*" *und* "A *Menge*" *und* "$\exists \Omega, \Xi : (\Omega \in D) \wedge (\Xi$ *Zahl*$) \wedge ((A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi) \wedge (w = (\Omega, \xi - \Xi))$".

c) *Aus* "$(p, q) \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$" *folgt* "$\xi$ *Zahl*" *und* "A *Menge*" *und* "$p \in D$" *und* "$\exists \Xi : (\Xi$ *Zahl*$) \wedge ((A \setminus p, \Xi) \in \phi) \wedge (q = \xi - \Xi)$".

d) *Aus* "ξ, x *Zahl*" *und* "$p \in D$" *und* "$(A \setminus p, x) \in \phi$" *folgt* "$(p, \xi - x) \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$".

`RECH`-**Notation**.
$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$

Beweis **355-7** a)

1: Via **14-3** gilt: $(\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$ Relation.

2: Aus "$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$ und
aus 1
folgt: $\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$ Relation.

b) VS gleich $w \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$.

1: Aus VS gleich "$w \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$" und
aus "$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$"
folgt: $w \in (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$.

2: Aus 1 "$w \in (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$"
folgt via **14-3**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Upsilon : ((\Omega, \Upsilon) \in A\_\mathsf{stm.id}_D) \wedge ((\Upsilon, \Phi) \in \xi - .\phi) \wedge (w = (\Omega, \Phi)).$$

...

<u>Beweis **355-7**</u> `b)` `VS` gleich $w \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$.

...

`3.1:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in A\_\mathsf{stm}.\mathsf{id}_D \ldots$" und
aus **298-10**"stm Algebra in $\mathcal{U}$"
folgt via **247-1**: $\exists \Gamma : ((\Omega, \Gamma) \in \mathsf{id}_D) \wedge (\Upsilon = A\_\mathsf{stm}\_\Gamma)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots (\Upsilon, \Phi) \in \xi - .\phi \ldots$"
folgt via **248-22**: $\boxed{\xi \text{ Zahl}}$

`3.3:` Aus `2`"$\ldots (\Upsilon, \Phi) \in \xi - .\phi \ldots$"
folgt via **248-22**: $\exists \Xi : ((\Upsilon, \Xi) \in \phi) \wedge (\Xi \text{ Zahl}) \wedge (\Phi = \xi - \Xi)$.

`3.4:` Aus `2`"$\ldots (\Upsilon, \Phi) \in \xi - .\phi \ldots$"
folgt via **folk**: Υ Menge.

`4.1:` Aus `3.1`"$\ldots (\Omega, \Gamma) \in \mathsf{id}_D \ldots$"
folgt via **20-10**: $(\Omega \in D) \wedge (\Omega = \Gamma)$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\ldots \Upsilon = A\_\mathsf{stm}\_\Gamma$" und
aus `3.4`
folgt: A_stm_Γ Menge.

`4.3:` Aus `3.3`"$\ldots \Phi = \xi - \Xi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, \xi - \Xi)$.

`5.1:` Aus **298-10**"stm Algebra in $\mathcal{U}$" und
aus `4.2`"A_stm_Γ Menge"
folgt via **93-12**: $A, \Gamma \in \mathcal{U}$.

`5.2:` Aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Phi)$" und
aus `4.3`
folgt: $w = (\Omega, \xi - \Xi)$.

`6:` Aus `5.1`"$A, \Gamma \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: A, Γ Menge.

`7.1:` Aus `6`"A, Γ Menge"
folgt via **298-11**: $A\_\mathsf{stm}\_\Gamma = A \setminus \Gamma$.

`7.2:` Aus `6`
folgt: $\boxed{A \text{ Menge}}$

...

<u>Beweis **355-7**</u> `b)` `VS` gleich $w \in \mathtt{355.0}(\xi, \phi, A, D)$.

...

`8:` Aus `3.1`"$\ldots \Upsilon = A\_\mathsf{stm}\_\Gamma$" und
aus `7.1`
folgt: $\Upsilon = A \setminus \Gamma$.

`9:` Aus `8` und
aus `4.1`"$\ldots \Omega = \Gamma$"
folgt: $\Upsilon = A \setminus \Omega$.

`10:` Aus `9`"$\Upsilon = A \setminus \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Upsilon, \Xi) = (A \setminus \Omega, \Xi)$.

`11:` Aus `3.3`"$\ldots (\Upsilon, \Xi) \in \phi \ldots$" und
aus `10`
folgt: $(A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi$.

`12:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.3`"$\exists \Xi \ldots$",
aus `4.1`"$\Omega \in D \ldots$",
aus `3.3`"$\ldots \Xi$ Zahl$\ldots$",
aus `11`"$(A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi$" und
aus `5.2`"$w = (\Omega, \xi - \Xi)$"
folgt:

$$\boxed{\exists \Omega, \Xi : (\Omega \in D) \wedge (\Xi \text{ Zahl}) \wedge ((A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi) \wedge (w = (\Omega, \xi - \Xi))}$$

<u>Beweis **355-7** `c)` `VS` gleich</u> $(p,q) \in \mathtt{355.0}(\xi,\phi,A,D)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathtt{355.0}(\xi,\phi,A,D)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathtt{355.0}(\xi,\phi,A,D)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{(\xi \text{ Zahl}) \wedge (A \text{ Menge})}$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathtt{355.0}(\xi,\phi,A,D)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Xi : (\Omega \in D) \wedge (\Xi \text{ Zahl}) \wedge ((A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi) \wedge ((p,q) = (\Omega, \xi - \Xi))$.

`2:` Aus `1.3`"$\ldots (p,q) = (\Omega, \xi - \Xi)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \xi - \Xi)$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt: $\boxed{p \in D}$

`3.2:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $A \setminus p = A \setminus \Omega$.

`4:` Aus `3.2`"$A \setminus p = A \setminus \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(A \setminus p, \Xi) = (A \setminus \Omega, \Xi)$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.3`"$\ldots (A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi \ldots$"
folgt: $(A \setminus p, \Xi) \in \phi$.

`6:` Aus `1.3`"$\exists \ldots \Xi \ldots$",
aus `1.3`"$\ldots \Xi$ Zahl$\ldots$",
aus `5` und
aus `2`"$\ldots q = \xi - \Xi$"
folgt: $\boxed{\exists \Xi : (\Xi \text{ Zahl}) \wedge ((A \setminus p, \Xi) \in \phi) \wedge (q = \xi - \Xi)}$

<u>Beweis **355-7**</u> `d) VS` gleich $(\xi, x \text{ Zahl}) \wedge (p \in D) \wedge ((A \setminus p, x) \in \phi)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (A \setminus p, \xi) \in \phi$"
folgt via **folk**: $A \setminus p$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in D \ldots$"
folgt via **20-9**: $(p, p) \in \mathsf{id}_D$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots (A \setminus p, x) \in \phi$" und
aus `VS` gleich "ξ, x Zahl…"
folgt via **248-22**: $(A \setminus p, \xi - x) \in \xi - .\phi$.

`2.1:` Aus `1.2`"p Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$A \setminus p$ Menge" und
aus `1.2`"p Menge"
folgt via **213-10**: A Menge.

`3.1:` Aus `2.2`"A Menge"
folgt via **0-22**: $A \in \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `3.1`"A Menge" und
aus `1.2`"p Menge"
folgt via **298-11**: $A\_\mathsf{stm}\_p = A \setminus p$.

`4.1:` Aus **298-10**"stm Algebra in $\mathcal{U}$",
aus `1.3`"$(p, p) \in \mathsf{id}_D$",
aus $\ldots A \in \mathcal{U}$ und
aus `2.1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **247-1**: $(p, A\_\mathsf{stm}\_p) \in A\_\mathsf{stm}.\mathsf{id}_D$.

`4.2:` Aus `3.2`"$A\_\mathsf{stm}\_p = A \setminus p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, A\_\mathsf{stm}\_p) = (p, A \setminus p)$.

`5:` Aus `4.2` und
aus `4.1`
folgt: $(p, A \setminus p) \in A\_\mathsf{stm}.\mathsf{id}_D$.

`6:` Aus `5`"$(p, A \setminus p) \in A\_\mathsf{stm}.\mathsf{id}_D$" und
aus `1.4`"$(A \setminus p, \xi - x) \in \xi - .\phi$"
folgt via **14-5**: $(p, \xi - x) \in (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm}.\mathsf{id}_D)$.

…

<u>Beweis **355-7**</u> `d)` `VS` gleich $(\xi, x \text{ Zahl}) \wedge (p \in D) \wedge ((A \setminus p, x) \in \phi)$.

...

`7:` Aus `6`
folgt **p.def.**: $(p, \xi - x) \in \mathtt{355.0}(\xi, \phi, A, D)$.

$\square$

355-8. Zur Bestimmung von Definitions-und Werte-Bereich von $\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$ ist gelegentlich vorliegendes Resultat von Interesse.

355-8(Satz)

a) *Aus* "$p\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)\,)$"
folgt "$p\in D$" *und* "$A\setminus p\in\phi^{-1}[\mathbb{A}]$".

b) *Aus* "ξ *Zahl*" *und* "$p\in D$" *und* "$A\setminus p\in\phi^{-1}[\mathbb{A}]$"
folgt "$p\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)\,)$".

c) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)\,)\subseteq\mathbb{A}$.

$\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)\;=(\xi-.\phi)\circ(A\_\mathsf{stm.id}_D)$

Beweis **355-8**

RECH-**Notation**.

---

a) VS gleich $p\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)\,)$.

1: Aus VS gleich "$p\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)\,)$"
folgt via **folk**: $\exists\Omega:(p,\Omega)\in\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$.

2.1: Aus 1"$\ldots(p,\Omega)\in\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$"
folgt via **355-6**: $\boxed{p\in D}$

2.2: Aus 1"$\ldots(p,\Omega)\in\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$"
folgt via **355-6**: $\exists\Xi:(\Xi\text{ Zahl})\wedge((A\setminus p,\Xi)\in\phi)$.

3: Aus 2.2"$\ldots\Xi$ Zahl$\ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: $\Xi\in\mathbb{A}$.

4: Aus 2.2"$\ldots(A\setminus p,\Xi)\in\phi$" und
aus 3"$\Xi\in\mathbb{A}$"
folgt via **folk**: $\boxed{A\setminus p\in\phi^{-1}[\mathbb{A}]}$

Beweis **355-8** `b)` `VS` gleich $(\xi \text{ Zahl}) \wedge (p \in D) \wedge (A \setminus p \in \phi^{-1}[\mathbb{A}])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \setminus p \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge ((A \setminus p, \Omega) \in \phi)$.

`2:` Aus 1"$\ldots \Omega \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: Ω Zahl.

`3:` Aus `VS` gleich "ξ Zahl…",
aus 2"Ω Zahl",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in D \ldots$" und
aus 1"$\ldots (A \setminus p, \Omega) \in \phi$"
folgt via **355-7**: $(p, \xi - \Omega) \in 355.0(\xi, \phi, A, D)$.

`4:` Aus 3"$(p, \xi - \Omega) \in 355.0(\xi, \phi, A, D)$"
folgt via **folk**: $p \in \mathrm{dom}\,(355.0(\xi, \phi, A, D))$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathrm{ran}\,(355.0(\xi, \phi, A, D))$.

`1:` Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathrm{ran}\,(355.0(\xi, \phi, A, D))$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in 355.0(\xi, \phi, A, D)$.

`2:` Aus 1"$(\Omega, \alpha) \in 355.0(\xi, \phi, A, D)$"
folgt via **355-7**: $(\xi \text{ Zahl}) \wedge (\exists \Xi : (\Xi \text{ Zahl}) \wedge (\alpha = \xi - \Xi))$.

`3:` Aus 2"ξ Zahl…" und
aus 2"$\ldots \Xi$ Zahl…"
folgt via **SSZ**: $\xi - \Xi$ Zahl.

`4:` Aus 2"$\ldots \alpha = \xi - \Xi$" und
aus 3
folgt: α Zahl.

`5:` Aus 4"α Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathrm{ran}\,(355.0(\xi, \phi, A, D))) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathrm{ran}\,(355.0(\xi, \phi, A, D)) \subseteq \mathbb{A}$.

$\square$

355-9. Der strukturell reichhaltigere Fall ϕ Funktion entlastet **355-7** ein wenig.

355-9(Satz)

a) *Aus* “ϕ *Funktion*” *folgt* “$\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$ *Funktion*”.

b) *Aus* “ϕ *Funktion*”
und “$w \in \mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$” *folgt* “$\xi$ *Zahl*”
und “A *Menge*”
und ”$\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (A \setminus \Omega \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (w = (\Omega, \xi - \phi(A \setminus \Omega)))$”.

c) *Aus* “ϕ *Funktion*”
und “$(p,q) \in \mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$” *folgt* “$\xi$ *Zahl*”
und “A *Menge*”
und “$p \in D$”
und “$A \setminus p \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$”
und “$q = \xi - \phi(A \setminus p)$”.

d) *Aus* “ϕ *Funktion*”
und “ξ *Zahl*”
und “$p \in D$”
und “$A \setminus p \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$”
folgt “$(p, \xi - \phi(A \setminus p)) \in \mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$”
und “$(\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D))(p) = \xi - \phi(A \setminus p)$”.

RECH-**Notation**.
$\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D) = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$.

<u>Beweis **355-9**</u> `a)` `VS` gleich ϕ Funktion.

`1.1:` Via **355-7** gilt: $\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$ Relation.

`Thema1.2` $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma) \in \mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha,\beta)\ldots \in \mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$"
folgt via **355-7**: $\exists \Xi : ((A\setminus\alpha,\Xi)\in\phi)\wedge(\beta=\xi-\Xi)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots(\alpha,\gamma) \in \mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$"
folgt via **355-7**: $\exists \Phi : ((A\setminus\alpha,\Phi)\in\phi)\wedge(\gamma=\xi-\Phi)$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion",
aus `2.1`"$\ldots(A\setminus\alpha,\Xi)\in\phi\ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots(A\setminus\alpha,\Phi)\in\phi\ldots$"
folgt via **18-18(Def)**: $\Xi=\Phi$.

`4:` Aus `3`"$\Xi=\Phi$"
folgt: $\xi-\Xi=\xi-\Phi$.

`5:` Aus `2.1`"$\ldots\beta=\xi-\Xi$",
aus `2.2`"$\ldots\gamma=\xi-\Phi$" und
aus `4`
folgt: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{355.0}(\xi,\phi,A,D)$ Funktion.

Beweis **355-9** `b)` `VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (w \in \texttt{355.0}(\xi, \phi, A, D)\,)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \texttt{355.0}(\xi, \phi, A, D)$"

folgt via **355-7**: $\boxed{\xi \text{ Zahl}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \texttt{355.0}(\xi, \phi, A, D)$"

folgt via **355-7**: $\boxed{A \text{ Menge}}$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \texttt{355.0}(\xi, \phi, A, D)$"
folgt via **355-7**:

$$\exists \Omega, \Xi : (\Omega \in D) \wedge (\Xi \text{ Zahl}) \wedge ((A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi) \wedge (w = (\Omega, \xi - \Xi)).$$

`2.1:` Aus `1.3`"$\ldots \Xi$ Zahl$\ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: $\Xi \in \mathbb{A}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion$\ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots (A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi \ldots$"
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(A \setminus \Omega)$.

`3.1:` Aus `1.3`"$\ldots (A \setminus \Omega, \Xi) \in \phi \ldots$" und
aus `2.1`"$\Xi \in \mathbb{A}$"
folgt via **folk**: $A \setminus \Omega \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\Xi = \phi(A \setminus \Omega)$"
folgt: $\xi - \Xi = \xi - \phi(A \setminus \Omega)$.

`4:` Aus `3.2`"$\xi - \Xi = \xi - \phi(A \setminus \Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \xi - \Xi) = (\Omega, \xi - \phi(A \setminus \Omega))$.

`5:` Aus `1.3`"$\ldots w = (\Omega, \xi - \Xi)$" und
aus `4`
folgt: $w = (\Omega, \xi - \phi(A \setminus \Omega))$.

`6:` Aus `1.3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.3`"$\ldots \Omega \in D \ldots$",
aus `3.1` und
aus `5`

folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (A \setminus \Omega \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (w = (\Omega, \xi - \phi(A \setminus \Omega)))}$

<u>Beweis **355-9**</u> `c)` `VS` gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathtt{355.0}(\xi,\phi,A,D)\,)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathtt{355.0}(\xi,\phi,A,D)$ "

folgt via **355-7**: $\boxed{(\xi \text{ Zahl}) \wedge (A \text{ Menge}) \wedge (p \in D)}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathtt{355.0}(\xi,\phi,A,D)$ "
folgt via **355-7**: $\exists \Xi : (\Xi \text{ Zahl}) \wedge ((A \setminus p, \Xi) \in \phi) \wedge (q = \xi - \Xi)$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots \Xi$ Zahl$\ldots$ "
folgt via **95-4(Def)**: $\Xi \in \mathbb{A}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion$\ldots$ " und
aus `1.2`"$\ldots (A \setminus p, \Xi) \in \phi \ldots$"
folgt via **folk**: $\Xi = \phi(A \setminus p)$.

`3.1:` Aus `1.2`"$\ldots (A \setminus p, \Xi) \in \phi \ldots$" und
aus `2.1`"$\Xi \in \mathbb{A}$"

folgt via **folk**: $\boxed{A \setminus p \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]}$

`3.2:` Aus `2.2`"$\Xi = \phi(A \setminus p)$" und
aus `1.2`"$\ldots q = \xi - \Xi$"

folgt: $\boxed{q = \xi - \phi(A \setminus p)}$

<u>Beweis **355-9**</u> `d)` `VS` gleich (ϕ Funktion) $\wedge$ (ξ Zahl) $\wedge$ ($p \in D$) $\wedge$ ($A \setminus p \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$).

`1.1:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$A \setminus p \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$…"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge ((A \setminus p, \Omega) \in \phi)$.

`2.1:` Aus `1.2`"…$\Omega \in \mathbb{A}$…"
folgt via **95-4(Def)**: Ω Zahl.

`2.2:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion…" und
aus `2.1`"…$(A \setminus p, \Omega) \in \phi$"
folgt via **folk**: $\Omega = \phi(A \setminus p)$.

`3:` Aus `VS` gleich "…ξ Zahl…",
aus `2.1`"Ω Zahl",
aus `VS` gleich "…$p \in D$…" und
aus `1.2`"…$(A \setminus p, \Omega) \in \phi$"
folgt via **355-7**: $(p, \xi - \Omega) \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$.

`4:` Aus `3`"$(p, \xi - \Omega) \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$" und
aus `2.2`
folgt: $\boxed{(p, \xi - \phi(A \setminus p)) \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)}$

`5:` Aus `1.1`"$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$ Funktion" und
aus `4`"$(p, \xi - \phi(A \setminus p)) \in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$"
folgt via **folk**: $\xi - \phi(A \setminus p) = (\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D))(p)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\boxed{(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D))(p) = \xi - \phi(A \setminus p)}$

$\square$

355-10. Nun soll $\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D)$ in Richtung ψ von **355-5** bewegt werden.

355-10(Satz) *Es gelte:*

→) *A Menge.*

→) $E \subseteq \mathcal{P}(A)$.

→) *ϕ Funktion.*

→) $E \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

→) $\phi[E] \subseteq \mathbb{A}$.

→) *ξ Zahl.*

→) $\psi = \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\mathtt{in}} E)$.

Dann filgt:

a) *ψ Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,\psi = A \setminus_{\mathtt{in}} E$.

c) $\mathsf{ran}\,\psi \subseteq \mathbb{A}$.

d) $\psi : A \setminus_{\mathtt{in}} E \to \mathbb{A}$.

e) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\psi(A \setminus \alpha) = \xi - \phi(\alpha))$.

RECH-**Notation**.
$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$

Beweis **355-10**

1: Aus →) " ϕ Funktion "
folgt via **355-9**: $\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\mathtt{in}} E)$ Funktion.

2.a): Aus 1 und
aus →) " $\psi = \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\mathtt{in}} E)$ "
folgt: ψ Funktion.

> $\boxed{\mathtt{Thema2.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\mathtt{in}} E)\,)$.
> Aus Thema2.1 " $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\mathtt{in}} E)\,)$ "
> folgt via **355-8**: $\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} E$.

Ergo Thema2.1: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\mathtt{in}} E)\,)) \Rightarrow (\alpha \in A \setminus_{\mathtt{in}} E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1	" $\mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\mathtt{in}} E)\,) \subseteq A \setminus_{\mathtt{in}} E$ "

...

<u>Beweis **355-10**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $\alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} E.$

3: Aus Thema2.2“$\alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} E$”
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = A \setminus \Omega).$

4: Aus 3“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus →)“$E \subseteq \mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathcal{P}(A).$

5: Aus 5“$\Omega \in \mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\Omega \subseteq A.$

6: Aus 6“$\Omega \subseteq A$”
folgt via **355-3**: $A \setminus (A \setminus \Omega) = \Omega.$

7: Aus 6 und
aus 3“$\ldots \alpha = A \setminus \Omega$”
folgt: $A \setminus \alpha = \Omega.$

8: Aus 7 und
aus 3“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt: $A \setminus \alpha \in E.$

9: Aus 8“$A \setminus \alpha \in E$” und
aus →)“$E \subseteq \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt via **folk**: $A \setminus \alpha \in \mathsf{dom}\, \phi.$

10: Aus 8“$A \setminus \alpha \in E$” und
aus 9“$A \setminus \alpha \in \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt via **folk**: $A \setminus \alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, \phi.$

11: Aus VS gleich “ϕ Funktion...” und
aus 10“$A \setminus \alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt via **18-27**: $\phi(A \setminus \alpha) \in \phi[E].$

12: Aus 11“$\phi(A \setminus \alpha) \in \phi[E]$” und
aus →)“$\phi[E] \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **folk**: $\phi(A \setminus \alpha) \in \mathbb{A}.$

...

...

Beweis **355-10** . . .

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $\alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} E.$

. . .

`13:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion. . . " und
aus `12`"$\phi(A \setminus \alpha) \in \mathbb{A}$"
folgt via **18-29**: $A \setminus \alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}].$

`14:` Aus →) "ξ Zahl",
aus `Thema2.2`"$\alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} E$" und
aus `13`"$A \setminus \alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$"
folgt via **355-8**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,).$

Ergo `Thema2.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2}\,\big|\ \text{"}A \setminus_{\texttt{in}} E \subseteq \mathsf{dom}\,(355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)\text{"}}$

`2.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,) \subseteq A \setminus_{\texttt{in}} E$" und
aus `A2` gleich "$A \setminus_{\texttt{in}} E \subseteq \mathsf{dom}\,(355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)$"
folgt via **GleichhheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,) = A \setminus_{\texttt{in}} E.$

`2.4:` Via **355-9** gilt: $\mathsf{ran}\,(355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,) \subseteq \mathbb{A}.$

`3.b):` Aus `2.3` und
aus →) "$\psi = 355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)$"
folgt. $\mathsf{dom}\,\psi = A \setminus_{\texttt{in}} E.$

`3.c):` Aus `2.4` und
aus →) "$\psi = 355.0(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)$"
folgt: $\mathsf{ran}\,\psi \subseteq \mathbb{A}.$

`4.d):` Aus `2.a)` "ψ Funktion",
aus `3.b)` "$\mathsf{dom}\,\psi = A \setminus_{\texttt{in}} E$" und
aus `3.c)` "$\mathsf{ran}\,\psi \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\psi : A \setminus_{\texttt{in}} E \to \mathbb{A}.$

. . .

<u>Beweis **355-10**</u> . . .

`Thema5` $\alpha \in E.$

6: Aus →) “A Menge” und
aus `Thema1`“$\alpha \in E$”
folgt via **220-5**: $A \setminus \alpha \in A \setminus_{\texttt{in}} E.$

7: Aus 6 und
aus 2.3
folgt: $A \setminus \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,).$

8: Aus 1“$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)$ Funktion” und
aus 7“$A \setminus \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)$”
folgt via **folk**:
$(A \setminus \alpha, (\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)(A \setminus \alpha))$
$\in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,.$

9: Aus →) “ϕ Funktion”,
aus 8 gleich “$(A \setminus \alpha, (\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)(A \setminus \alpha))$
$\in \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)$”
folgt via **355-9**:
$(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)(A \setminus \alpha) = \xi - \phi(A \setminus (A \setminus \alpha)).$

10: Aus `Thema5`“$\alpha \in E$” und
aus →) “$E \subseteq \mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}(A).$

11: Aus 10“$\alpha \in \mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\alpha \subseteq A.$

12: Aus 11“$\alpha \subseteq A$”
folgt via **355-3**: $A \setminus (A \setminus \alpha) = \alpha.$

13: Aus 9 und
aus 12
folgt: $(\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)\,)(A \setminus \alpha) = \xi - \phi(\alpha).$

14: Aus 13 und
aus →) “$\psi = \mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, A \setminus_{\texttt{in}} E)$”
folgt: $\psi(A \setminus \alpha) = \xi - \phi(\alpha).$

Ergo `Thema5`: `Ae)` “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\psi(A \setminus \alpha) = \xi - \phi(\alpha))$”

□

355-11. Die angestrebte Konstruktion gelingt nicht für beliebige A_Gewichte.

355-11(Satz)

a) *Aus* "ϕ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathfrak{M} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
und "$\phi[\mathfrak{M}] \subseteq \mathbb{C}$"
folgt "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\beta \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \setminus \beta \in \mathfrak{M})) \Rightarrow (\phi(\alpha \setminus \beta) = \phi(\alpha) - \phi(\beta))$".

b) *Aus* "ϕ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi$"
und "$\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
und "$\mathfrak{R}$ *Mengenring*"
und "$\phi[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{C}$"
folgt "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\phi(\alpha \setminus \beta) = \phi(\alpha) - \phi(\beta))$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **355-11**</u> `a)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \mathsf{A\_Gewicht} \text{ auf } E \subseteq \mathsf{dom}\,\phi) \wedge (\phi[E] \subseteq \mathbb{C})$.

`Thema1` $(\alpha, \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\beta \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \setminus \beta \in \mathfrak{M})$.

`2.1:` Via **5-10** gilt: $\beta \cap (\alpha \setminus \beta) = 0$.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta \subseteq \alpha \ldots$”
folgt via **258-32**: $\beta \cup (\alpha \setminus \beta) = \alpha$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `Thema1`“$\alpha \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$”
folgt: $\beta \cup (\alpha \setminus \beta) \in \mathfrak{M}$.

`4:` Aus `VS` gleich “ϕ ist $\mathsf{A\_Gewicht}$ auf $\mathfrak{M} \ldots$”,
aus `Thema1`“$\ldots \beta \in \mathfrak{M} \ldots$”,
aus `Thema1`“$\ldots \alpha \setminus \beta \in \mathfrak{M}$”,
aus `3`“$\beta \cup (\alpha \setminus \beta) \in \mathfrak{M}$” und
aus `2.1`“$\beta \cap (\alpha \setminus \beta) = 0$”
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(\beta \cup (\alpha \setminus \beta)) = \phi(\beta) + \phi(\alpha \setminus \beta)$.

`5:` $\phi(\alpha \setminus \beta) + \phi(\beta) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \phi(\beta) + \phi(\alpha \setminus \beta) \stackrel{4}{=} \phi(\beta \cup (\alpha \setminus \beta)) \stackrel{2.2}{=} \phi(\alpha)$.

`6:` Aus `VS` gleich “ϕ ist $\mathsf{A\_Gewicht}$ auf $\mathfrak{M} \ldots$”
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

`7:` Aus `6`“ϕ Funktion”,
aus `Thema1`“$\alpha, \beta \in \mathfrak{M} \ldots$” und
aus $\rightarrow$)“$\ldots \mathfrak{M} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$”
folgt via **18-27**: $\phi(\alpha), \phi(\beta) \in \phi[\mathfrak{M}]$.

`8:` Aus `7`“$\phi(\alpha), \phi(\beta) \in \phi[\mathfrak{M}]$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \phi[\mathfrak{M}] \subseteq \mathbb{C}$”
folgt via **folk**: $\phi(\alpha), \phi(\beta) \in \mathbb{C}$.

`9:` Aus `8`“$\phi(\alpha) \ldots \in \mathbb{C}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $\phi(\alpha)$ Zahl.

`10:` Aus `5`“$\phi(\alpha \setminus \beta) + \phi(\beta) = \ldots = \phi(\alpha)$”,
aus `9`“$\phi(\alpha)$ Zahl” und
aus `8`“$\ldots \phi(\beta) \in \mathbb{C}$”
folgt via **AVR**: $\phi(\alpha \setminus \beta) = \phi(\alpha) - \phi(\beta)$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\beta \subseteq \alpha) \wedge (\alpha \setminus \beta \in \mathfrak{M})) \Rightarrow (\phi(\alpha \setminus \beta) = \phi(\alpha) - \phi(\beta)).$$

<u>Beweis **355-11**</u> `b)`

`VS` gleich $(\phi \text{ ist } \mathsf{A\_Gewicht} \text{ auf } \mathsf{dom}\,\phi) \wedge (\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi) \wedge (\mathfrak{R} \text{ Mengenring}) \wedge (\phi[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{C})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta \subseteq \alpha)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\mathsf{A\_Gewicht}$ auf $\mathsf{dom}\,\phi \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi \ldots$" folgt via **346-14**: ϕ ist $\mathsf{A\_Gewicht}$ auf $\mathfrak{R}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R}$ Mengenring$\ldots$" und aus `Thema1` "$\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \ldots$" folgt via **346-6**: $\alpha \setminus \beta \in \mathfrak{R}$.

`3:` Aus `2.1` "ϕ ist $\mathsf{A\_Gewicht}$ auf $\mathfrak{R}$", aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi \ldots$", aus `VS` gleich "$\ldots \phi[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{C}$", aus `Thema1` "$(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta \subseteq \alpha)$" und aus `2.2` "$\alpha \setminus \beta \in \mathfrak{R}$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$\phi(\alpha \setminus \beta) = \phi(\alpha) - \phi(\beta).$$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\phi(\alpha \setminus \beta) = \phi(\alpha) - \phi(\beta))$.

□

355-12. DieEinschränkung von $\Box$_Gewichten wurde bislang zu wenig beachtet.

355-12(Satz)

a) *Aus "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$"*
folgt "$(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N})$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$".

b) *Aus "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$" und "$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$"*
folgt "$(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N})$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{N}$".

c) *Aus "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$" und "$\mathfrak{N} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"*
folgt "$(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N})$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{N} = \mathsf{dom}\,(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N})$".

Beweis **355-12**

`ALG`-**Notation**.

...

<u>Beweis **355-12**</u> `a)` `VS` gleich ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

`1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

`2.1:` Aus `1`"ϕ Funktion"
folgt via **258-11**: $(\phi \mid \mathfrak{N})$ Funktion.

`Thema2.2` $(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)$.

`3:` Aus `Thema2.2`"$\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \ldots$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N}) \wedge (\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M})$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$",
aus `3`"$\ldots \alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}$" und
aus `Thema2.2`"$\ldots \alpha \cap \beta = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha)\_\Box\_\phi(\beta)$.

`4.2:` Aus `3`"$\alpha \ldots \in \mathfrak{N} \ldots$"
folgt via **258-11**: $(\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha) = \phi(\alpha)$.

`4.3:` Aus `3`"$\ldots \beta \ldots \in \mathfrak{N} \ldots$"
folgt via **258-11**: $(\phi \mid \mathfrak{N})(\beta) = \phi(\beta)$.

`4.4:` Aus `3`"$\ldots \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N} \ldots$"
folgt via **258-11**: $(\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha \cup \beta)$.

`5:` Aus `4.1`,
aus `4.2`,
aus `4.3` und
aus `4.4`
folgt:
$$(\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha \cup \beta) = (\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha)\_\Box\_(\phi \mid \mathfrak{N})(\beta).$$

Ergo `Thema2.2`:

`A1` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow ((\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha \cup \beta) = (\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha)\_\Box\_(\phi \mid \mathfrak{N})(\beta))$"

`3:` Aus `2.1`"$(\phi \mid \mathfrak{N})$ Funktion" und
aus `A1`"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow ((\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha \cup \beta) = (\phi \mid \mathfrak{N})(\alpha)\_\Box\_(\phi \mid \mathfrak{N})(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**: $(\phi \mid \mathfrak{N})$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$.

<u>Beweis **355-12**</u> `b)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \square\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M})$.

`1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N})$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$"
folgt via **folk**: $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N})$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{N}$.

`c)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \square\text{\_Gewicht auf } \mathsf{dom}\,\phi) \wedge (\mathfrak{N} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(\phi$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi) \wedge (\mathfrak{N} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N}) \text{ ist } \square\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{N}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{N} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\mathfrak{N} \cap \mathsf{dom}\,\phi = \mathfrak{N}$.

`1.3:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N}) = \mathfrak{N} \cap \mathsf{dom}\,\phi$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\boxed{\mathfrak{N} = \mathsf{dom}\,(\phi \downharpoonleft \mathfrak{N})}$

$\square$

355-13. Um **355-5** auf $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ in interessanten Situationen anzuwenden, ist ein "Lokalisierungs-Schritt" erforderlich.

355-13(Satz) *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) ϕ *ist* $\Box\_$*Gewicht auf* $\mathsf{dom}\,\phi$.

$\rightarrow$) $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

$\rightarrow$) $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

$\rightarrow$) $A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

$\rightarrow$) ψ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,\psi = A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $(\phi \restriction \mathfrak{R}) \cup \psi$ *ist* $\Box\_$*Gewicht auf* $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`ii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$$\Rightarrow \quad \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta).$$

ALG-Notation.

Beweis **355-13** $\boxed{\boxed{\mathtt{i)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$

`VS` gleich $(\phi \restriction \mathfrak{R}) \cup \psi$ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "ϕ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **355-12**: $(\phi \restriction \mathfrak{R})$ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathfrak{R} = \mathsf{dom}\,(\phi \restriction \mathfrak{R})$.

`2:` Aus `1` "$(\phi \restriction \mathfrak{R})$ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathfrak{R} = \mathsf{dom}\,(\phi \restriction \mathfrak{R})$",
aus $\rightarrow$) "$\mathfrak{R}$ Mengenring",
aus $\rightarrow$) "$A \notin \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$",
aus $\rightarrow$) "ψ Funktion",
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\,\psi = A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$" und
aus `VS` gleich "$(\phi \restriction \mathfrak{R}) \cup \psi$ ist $\Box_$Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$"
folgt via **355-5**:
$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathfrak{R}) \wedge (\gamma \subseteq \delta))$
$$\Rightarrow \quad \psi(A \setminus (\delta \setminus \gamma)) = \psi(A \setminus \delta)\_\Box\_(\phi \restriction \mathfrak{R})(\gamma) = (\phi \restriction \mathfrak{R})(\gamma)\_\Box\_\psi(A \setminus \delta).$$

...

Beweis **355-13** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$

`VS` gleich $(\phi \mid \mathfrak{R}) \cup \psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \cup (A \setminus_{\texttt{in}} \mathfrak{R})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

`4.1`: Aus `Thema3`"$(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$" und
aus `2`"$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathfrak{R}) \wedge (\gamma \subseteq \delta))$
$\Rightarrow \quad \psi(A \setminus (\delta \setminus \gamma)) = \psi(A \setminus \delta)\_\Box\_ (\phi \mid \mathfrak{R})(\gamma)$
$= (\phi \mid \mathfrak{R})(\gamma)\_\Box\_\psi(A \setminus \delta)$"
folgt: $\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_ (\phi \mid \mathfrak{R})(\alpha)$
$= (\phi \mid \mathfrak{R})(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

`4.2`: Aus `Thema2`"$\alpha \ldots \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **258-11**: $(\phi \mid \mathfrak{R})(\alpha) = \phi(\alpha)$.

`4.3`: Aus `Thema2`"$\ldots \beta \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **258-11**: $(\phi \mid \mathfrak{R})(\beta) = \phi(\beta)$.

`5`: Aus `4.1`,
aus `4.2` und
aus `4.3`
folgt:
$\psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

Ergo `Thema3`:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow \quad \psi(A \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(A \setminus \beta)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A \setminus \beta)$.

<u>Beweis **355-13**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha\subseteq\beta))$

$\Rightarrow\quad \psi(A\setminus(\beta\setminus\alpha))=\psi(A\setminus\beta)\_\Box\_\phi(\alpha)=\phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A\setminus\beta).$

$\texttt{1}$: Aus →) “ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,\phi$” und
aus →) “$\mathfrak{R}\subseteq\mathsf{dom}\,\phi$”
folgt via **355-12**: $(\phi\restriction\mathfrak{R})$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}=\mathsf{dom}\,(\phi\restriction\mathfrak{R})$.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $(\gamma,\delta\in\mathfrak{R})\wedge(\gamma\subseteq\delta)$.

$\texttt{3.1}$: Aus $\texttt{Thema2}$“$(\gamma,\delta\in\mathfrak{R})\wedge(\gamma\subseteq\delta)$” und
aus $\texttt{VS}$ gleich “$\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta\in\mathfrak{R})\wedge(\alpha\subseteq\beta))$
$\Rightarrow(\psi(A\setminus(\beta\setminus\alpha))=\psi(A\setminus\beta)\_\Box\_\phi(\alpha)$
$=\phi(\alpha)\_\Box\_\psi(A\setminus\beta))$”
folgt:
$\psi(A\setminus(\delta\setminus\gamma))=\psi(A\setminus\delta)\_\Box\_\phi(\gamma)=\phi(\gamma)\_\Box\_\psi(A\setminus\delta).$

$\texttt{3.2}$: Aus $\texttt{Thema2}$“$\gamma\ldots\in\mathfrak{R}\ldots$”
folgt via **258-11**: $(\phi\restriction\mathfrak{R})(\gamma)=\phi(\gamma).$

$\texttt{3.3}$: Aus $\texttt{Thema2}$“$\ldots\delta\in\mathfrak{R}\ldots$”
folgt via **258-11**: $(\phi\restriction\mathfrak{R})(\delta)=\phi(\delta).$

$\texttt{4}$: Aus $\texttt{3.1}$,
aus $\texttt{3.2}$ und
aus $\texttt{3.3}$
folgt:
$\psi(A\setminus(\delta\setminus\gamma))=\psi(A\setminus\delta)\_\Box\_(\phi\restriction\mathfrak{R})(\gamma)$
$=(\phi\restriction\mathfrak{R})(\gamma)\_\Box\_\psi(A\setminus\delta).$

Ergo $\texttt{Thema2}$:

$\texttt{A1}$ | “$\forall\gamma,\delta:((\gamma,\delta\in\mathfrak{R})\wedge(\gamma\subseteq\delta))$
$\Rightarrow(\psi(A\setminus(\delta\setminus\gamma))=\psi(A\setminus\delta)\_\Box\_(\phi\restriction\mathfrak{R})(\gamma)$
$=(\phi\restriction\mathfrak{R})(\gamma)\_\Box\_\psi(A\setminus\delta))$”

$\texttt{3}$: Aus $\texttt{1}$“$(\phi\restriction\mathfrak{R})$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}=\mathsf{dom}\,(\phi\restriction\mathfrak{R})$”,
aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring”,
aus →) “$A\notin\mathfrak{R}\subseteq\mathcal{P}(A)$”,
aus →) “ψ Funktion”,
aus →) “$\mathsf{dom}\,\psi=A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R}$” und
aus $\texttt{A1}$“$\forall\gamma,\delta:((\gamma,\delta\in\mathfrak{R})\wedge(\gamma\subseteq\delta))$
$\Rightarrow(\psi(A\setminus(\delta\setminus\gamma))=\psi(A\setminus\delta)\_\Box\_(\phi\restriction\mathfrak{R})(\gamma)=(\phi\restriction\mathfrak{R})(\gamma)\_\Box\_\psi(A\setminus\delta))$”
folgt via **355-5**:
$(\phi\restriction\mathfrak{R})\cup\psi$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}\cup(A\setminus_{\texttt{in}}\mathfrak{R})$

$\Box$

355-14. In der Tat kann $q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$, $\Box$ Algebra in A, gelegentlich speziellere Werte als bloß in A annehmen.

355-14(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow)$ A *Menge.*

$\rightarrow)$ $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

$\rightarrow)$ $q \in Q \subseteq A$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$.

Dann folgt:

a) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq (q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)^{-1}[Q]$.

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \Rightarrow ((q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\alpha) \in Q)$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **355-14**

`1:` Aus $\rightarrow)$ "$q \in Q \subseteq A$"
folgt via **folk**: $q \in A$.

`2.1:` Aus $\rightarrow)$ "$\Box$ Algebra in A",
aus $\rightarrow)$ "A Menge",
aus $\rightarrow)$ "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus `1` "$q \in A$"
folgt via **345-13**: $(q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ Funktion$) \wedge ((q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(0) = q)$.

`2.2:` Aus $\rightarrow)$ "$\Box$ Algebra in A",
aus $\rightarrow)$ "A Menge",
aus $\rightarrow)$ "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus `1` "$q \in A$"
folgt via **345-13**:

$$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))) \Rightarrow ((q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\gamma\} \cup \delta) = (q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\delta)\_\Box\_\gamma).$$

...

<u>Beweis</u> **355-14** . . .

`3:` Aus `2.1`“ . . . $(q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(0) = q$ ” und
aus →) “ $q \in Q \ldots$ ”
folgt: $(q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(0) \in Q.$

`4:` Aus `2.1`“ $q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}$ Funktion. . . ” und
aus `3`“ $(q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(0) \in Q$ ”
folgt via **18-29**: $0 \in (q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})^{-1}[Q].$

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $(\epsilon \in Q) \wedge (\epsilon \notin \xi \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \cap (q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})^{-1}[Q])$

`6.1:` Aus `Thema5`“ $\epsilon \in Q \ldots$ ” und
aus →) “ $\ldots Q \subseteq A$ ”
folgt via **folk**: $\epsilon \in A.$

`6.2:` Aus →) “ $\ldots Q \subseteq A$ ”
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A).$

`6.3:` Aus `Thema5`“ $\ldots \xi \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \cap (q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})^{-1}[Q]$ ”
folgt via **folk**: $(\xi \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \wedge (\xi \in (q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})^{-1}[Q]).$

`7:` Aus `6.3`“ $\xi \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \ldots$ ” und
aus `6.2`“ $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ ”
folgt via **folk**: $\xi \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A).$

`8:` Aus `6.1`“ $\epsilon \in A$ ”,
aus `Thema5`“ $\ldots \epsilon \notin \xi \ldots$ ”,
aus `7`“ $\xi \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ ” und
aus `2.2`“ $\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)))$
$\Rightarrow ((q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = (q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\delta)\_\Box\_\gamma)$ ”
folgt: $(q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\epsilon\} \cup \xi) = (q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\xi)\_\Box\_\epsilon.$

`9:` Aus `2.1`“ $q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box}$ Funktion. . . ” und
aus `6.3`“ $\ldots \xi \in (q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})^{-1}[Q]$ ”
folgt via **18-29**: $(q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\xi) \in Q.$

`10:` Aus `9`“ $(q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\xi) \in Q$ ”,
aus `Thema5`“ $\epsilon \in Q \ldots$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$ ”
folgt: $(q,\overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\xi)\_\Box\_\epsilon \in Q.$

. . .

. . .

<u>Beweis **355-14**</u> ...

`Thema5` $(\epsilon \in Q) \wedge (\epsilon \notin \xi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cap (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q])$

...

`11`: Aus `8` und
aus `10`
folgt: $(q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\{\epsilon\} \cup \xi) \in Q.$

`12`: Aus `2.1`“$q, \overset{\text{fin}}{\Box}$ Funktion... ” und
aus `11`“$(q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\{\epsilon\} \cup \xi) \in Q$”
folgt via **18-29**: $\{\epsilon\} \cup \xi \in (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q].$

Ergo `Thema5`:

`A1` | “$\forall \epsilon, \xi : ((\epsilon \in Q) \wedge (\epsilon \notin \xi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cap (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q]))$
$\Rightarrow (\{\epsilon\} \cup \xi \in (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q])$”

`6.a)`: Aus `4`“$0 \in (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q]$” und
aus `A1` gleich “$\forall \epsilon, \xi : ((\epsilon \in Q) \wedge (\epsilon \notin \xi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cap (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q]))$
$\Rightarrow (\{\epsilon\} \cup \xi \in (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q])$”
folgt via **347-3**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \subseteq (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q].$

`Thema7` $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q).$

`8`: Aus `Thema7`“$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$” und
aus `6.a)`“$\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \subseteq (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q]$”
folgt via **folk**: $\alpha \in (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q].$

`9`: Aus `2.1`“$q, \overset{\text{fin}}{\Box}$ Funktion... ” und
aus `8`“$\alpha \in (q, \overset{\text{fin}}{\Box})^{-1}[Q]$”
folgt via **18-29**: $(q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\alpha) \in Q.$

Ergo `Thema7`: `Ab)` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow ((q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\alpha) \in Q)$”

$\square$

355-15. Hier wird **355-14** auf $\mathsf{A}^{\texttt{fin}}$ angeweendet.

355-15(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrowtail)$ $0 \in Q \subseteq \mathbb{A}$.

$\rightarrowtail)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha + \beta \in Q)$.

Dann folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in Q)$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **355-15**

1: Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2**"A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$,
aus $\rightarrowtail)$"$0 \in Q \subseteq \mathbb{A}$" und
aus $\rightarrowtail)$"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha + \beta \in Q)$"
folgt via **355-14**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow ((0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}})(\alpha) \in Q)$.

2: Aus 1 und
aus **348-1(Def)**"$0, \overset{\mathsf{fin}}{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{\texttt{fin}}$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in Q)$.

□

355-16. Hier werden einige Klassen Q mit $0 \in Q \subseteq \mathbb{A}$ und $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha + \beta \in Q)$ angegeben.

355-16(Satz)

a) *“$0 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$” und “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{N})$”.*

b) *“$0 \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}$” und “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{Z})$”.*

c) *“$0 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$” und “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{Q})$”.*

d) *“$0 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$” und “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{R})$”.*

e) *“$0 \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$” und “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{T})$”.*

f) *“$0 \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$” und “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{C})$”.*

`RECHO.`-**Notation**

Beweis **355-16** `a)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$0 \in \mathbb{N}$” und
aus **159-9**“$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$”

folgt: $\boxed{0 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}}$

`Thema1.2` $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Aus `Thema1.2`“$\alpha, \beta \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-14**: $\alpha + \beta \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{N})$”

<u>Beweis</u> **<u>355-16</u>** `b)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}$"

folgt: $\boxed{0 \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}}$

> `Thema1.2` $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
> Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$"
> folgt via **164-9**: $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{Z})$"

`c)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{Q}$" und
aus **198-6**"$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$"

folgt: $\boxed{0 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}}$

> `Thema1.2` $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.
> Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$"
> folgt via **198-9**: $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{Q})$"

<u>Beweis **355-16**</u> `d)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$"

folgt: $\boxed{0 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}}$

`Thema1.2`	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$"	
folgt via $+$**SZ**:	$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{R})$"

`e)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{T}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$"

folgt: $\boxed{0 \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}}$

`Thema1.2`	$\alpha, \beta \in \mathbb{T}$.
Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta \in \mathbb{T}$"	
folgt via $+$**SZ**:	$\alpha + \beta \in \mathbb{T}$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{T})$"

<u>Beweis **355-16** `f)`</u>

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{C}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$"

folgt: $\boxed{0 \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}}$

`Thema1.2` $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$
Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $\quad \alpha + \beta \in \mathbb{C}.$

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{C})\text{”}}$

$\square$

355-17. Nun wird die fällige Kombination von **355-15,16** präsentiert.

355-17(Satz)

a) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{N})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{N})$.

b) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{Z})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{Z})$.

c) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{Q})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{Q})$.

d) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{R})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{R})$.

e) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{T})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{T})$.

f) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathbb{C})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\texttt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{C})$.

<u>Beweis **355-17**</u>

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

`a)`
Aus **355-17**"$0 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **355-17**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{N})$"
folgt via **355-15**: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{N})$.

`b)`
Aus **355-17**"$0 \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **355-17**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{Z})$"
folgt via **355-15**: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{Z})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{Z})$.

`c)`
Aus **355-17**"$0 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **355-17**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{Q})$"
folgt via **355-15**: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{Q})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{Q})$.

`d)`
Aus **355-17**"$0 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **355-17**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{R})$"
folgt via **355-15**: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{R})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{R})$.

`e)`
Aus **355-17**"$0 \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **355-17**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{T})$"
folgt via **355-15**: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{T})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{T})$.

`f)`
Aus **355-17**"$0 \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **355-17**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{C})$"
folgt via **355-15**: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{C})) \Rightarrow (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) \in \mathbb{C})$.

□

355-18. Es entwindet sich ein ψ, das in die Nähe der Forderungen von **355-5** angesiedelt ist.

355-18(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $Q \subseteq \mathbb{A}$.

$\rightarrow)$ $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

$\rightarrow)$ $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

$\rightarrow)$ $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ ξ *Zahl.*

$\rightarrow)$ $\psi = \mathsf{355.0}(\xi, \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}, Q, Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$.

Dann folgt:

a) ψ *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\, \psi = Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}$.

c) $\mathsf{ran}\, \psi \subseteq \mathbb{A}$.

d) $\psi : Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R} \to \mathbb{A}$.

e) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{R}) \Rightarrow (\psi(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

f) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(Q \setminus \beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) + \psi(Q \setminus \beta))$.

RECH-**Notation**.

$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm}.\mathsf{id}_D)$

<u>Beweis **355-18**</u>

1.1: Aus →) "$Q \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **AAI** "$\mathbb{A}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: Q Menge.

1.2: Aus →) "$Q \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

1.3: Via **312-2** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}(Q)$.

1.4: Aus →) "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{C}$" und
aus ⊆**SZ** "$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **folk**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{A}$.

2.1: Aus →) "$\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und
aus 1.3 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}(Q)$"
folgt via **folk**: $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(Q)$.

2.2: Aus →) "$\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$" und
aus 1.2 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt via **folk**: $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

3: Aus 2.2 "$\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$" und
aus **348-3** "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt: $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

4.abcd): Aus 1.1 "Q Menge",
aus 2.1 "$\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(Q)$",
aus **348-3** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ Funktion",
aus 3 "$\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$",
aus 1.4 " "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{A}$",
aus →) "ξ Zahl" und
aus →) "$\psi = 355.0(\xi, \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}, Q, Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$"
folgt via **355-10**:
$(\psi \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\psi = Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R}) \wedge (\mathsf{ran}\,\psi \subseteq \mathbb{A}) \wedge (\psi : Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R} \to \mathbb{A})$.

4.e): Aus 1.1 "Q Menge",
aus 2.1 "$\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(Q)$",
aus **348-3** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ Funktion",
aus 3 "$\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$",
aus 1.4 " "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{A}$",
aus →) "ξ Zahl" und
aus →) "$\psi = 355.0(\xi, \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}, Q, Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathfrak{R})$"
folgt via **355-10**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{R}) \Rightarrow (\psi(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

...

Beweis **355-18** ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

6.1: Aus **348-3**"$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$" und
aus **348-3**"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ ist A_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

6.2: Aus 2.2"$\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$" und
aus **348-3**"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt: $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

7: Aus 6.1"$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ ist A_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$",
aus 6.2"$\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$",
aus →)"$\mathfrak{R}$ Mengenring",
aus →)"$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathfrak{R}] \subseteq \mathbb{C}$",
aus Thema5"$\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus Thema5"$\ldots \alpha \setminus \beta$"
folgt via **355-11**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta \setminus \alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)$.

8: Aus →)"$\mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus Thema5"$\alpha, \beta \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-6**: $\beta \setminus \alpha \in \mathfrak{R}$.

9: Aus 8"$\beta \setminus \alpha \in \mathfrak{R}$" und
aus 4.e)"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{R}) \Rightarrow (\psi(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$"
folgt: $\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta \setminus \alpha)$.

10: $\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) \stackrel{9}{=} \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta \setminus \alpha) \stackrel{7}{=} \xi - (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$
$= \xi + (-(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} \xi + (-\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$
$\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (\xi + (-\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta))) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = (\xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta)) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)$.

11: Aus Thema5"$\ldots \beta \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus 4.e)
folgt: $\psi(Q \setminus \beta) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta)$.

12: Aus 10"$\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha))$
$= \ldots = (\xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta)) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)$" und
aus 11
folgt: $\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(Q \setminus \beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)$.

...

...

<u>Beweis **355-18**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)$.

...

13: Via **FSA** gilt: $\psi(Q \setminus \beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) + \psi(Q \setminus \beta)$.

14: Aus 12 und aus 13 folgt:

$$\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(Q \setminus \beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) + \psi(Q \setminus \beta).$$

Ergo `Thema5`:

`Af)` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha \subseteq \beta)) \Rightarrow \psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(Q \setminus \beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) + \psi(Q \setminus \beta)$"

$\square$

355-19. Die Ziellinie ist in Sicht.

355-19(Satz) *Es gelte:*

→) $Q \subseteq \mathbb{A}$.

→) Q *unendlich.*

→) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)] \subseteq \mathbb{C}$.

→) ξ *Zahl.*

→) $\psi = \mathsf{355.0}(\xi, \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}, Q, Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$.

→) $w = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonleft \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$.

Dann folgt:

a) w *ist* A*_Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cup (Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$.

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (w(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

c) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (w(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

d) $w(Q) = \xi$.

RECH-**Notation**.

$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$

<u>Beweis **355-19**</u>

1.1: Via **0-6** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

1.2: Via **346-5** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$ Mengenring.

2: Aus →) "$\ldots Q \subseteq \mathbb{A}$",
aus 1.1 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$",
aus 1.2 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$ Mengenring",
aus →) "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)] \subseteq \mathbb{C}$",
aus →) "ξ Zahl" und
aus →) "$\psi = 355.0(\xi, \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}, Q, Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$"
folgt via **355-18**: $(\psi \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \psi = Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$

$$\wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \Rightarrow (\psi(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)))$$

$$\wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$$
$$\Rightarrow (\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(Q \setminus \beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) + \psi(Q \setminus \beta))).$$

3.1: Aus **348-3** "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$" und
aus **348-2** "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ ist A_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

3.2: Aus →) "$Q \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$.

3.3: Via **312-2** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}(Q)$.

3.4: Aus →) "Q unendlich"
folgt via **312-2**: $Q \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

4: Aus 3.2 und
aus **348-2** "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{A})$"
folgt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

5: Aus 3.1 "$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ ist A_Gewicht auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$",
aus 4 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$",
aus 1.2 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$ Mengenring",
aus 3.4 "$Q \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$",
aus 3.3 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \subseteq \mathcal{P}(Q)$",
aus 2 "ψ Funktion…",
aus 2 "$\ldots \mathsf{dom}\, \psi = Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \ldots$" und
aus 2 "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \wedge (\alpha \subseteq \beta))$
$\Rightarrow (\psi(Q \setminus (\beta \setminus \alpha)) = \psi(Q \setminus \beta) + \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) + \psi(Q \setminus \beta))$"
folgt via **355-13**:

$$(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \upharpoonright \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \cup \psi \text{ ist A\_Gewicht auf } \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \cup (Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)).$$

…

Beweis **355-19** . . .

6.a): Aus →) " $w = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$ " und
aus 5
folgt: w ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cup (Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$.

$\boxed{\mathtt{Thema7}}$ $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$.

8.1: Aus 5 " $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$
ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cup (Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$ "
folgt via **346-1(Def)**: $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$ Funktion.

8.2: Aus **348-3** " $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ Funktion"
folgt via **258-11**: $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$ Funktion.

8.3: Aus Thema7 " $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$ " und
aus 4 " $\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$ "
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

9: Aus Thema7 " $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$ " und
aus 8.3 " $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$ "
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

10: Via **258-11** gilt:
$\mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}})$.

11: Aus 9 und
aus 10
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$.

12: Aus 8.2 " $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$ Funktion " ,
aus 8.1 " $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$ Funktion " und
aus 11 " $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$ "
folgt via **259-38**:
$((\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi)(\alpha) = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))\,(\alpha)$.

13.1: Aus →) " $w = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$ " und
aus 12
folgt: $w(\alpha) = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))\,(\alpha)$.

13.2: Aus Thema7 " $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$ "
folgt via **258-11**: $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \restriction \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))\,(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)$.

14: Aus 13.1 und
aus 13.2
folgt: $w(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)$.

. . .

. . .

<u>Beweis **355-19**</u> ...

Ergo Thema7: | Ab) | "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (w(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$"

$\boxed{\texttt{Thema8}}$ $\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$.

`9:` Aus →)"$Q \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge"
folgt via **TeilmengenAxiom**: Q Menge.

`10:` Aus `9`"Q Menge" und
aus `Thema8`"$\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$"
folgt via **220-5**: $Q \setminus \beta \in Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$.

`11:` Aus `10` und
aus `2`"$\ldots \mathsf{dom}\,\psi = Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \ldots$"
folgt: $Q \setminus \beta \in \mathsf{dom}\,\psi$.

`12:` Aus `5`"$(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonleft \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$
ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \cup (Q \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$"
folgt via **346-1(Def)**: $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonleft \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$ Funktion.

`13:` Aus `2`"ψ Funktion...",
aus `12`"$(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonleft \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$ Funktion" und
aus `11`"$Q \setminus \beta \in \mathsf{dom}\,\psi$"
folgt via **343-9**:
$$((\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonleft \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi)(Q \setminus \beta) = \psi(Q \setminus \beta).$$

`14.1:` Aus `13` und
aus →)"$w = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonleft \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \cup \psi$"
folgt: $w(Q \setminus \beta) = \psi(Q \setminus \beta)$.

`14.2:` Aus `Thema8`"$\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$" und
aus `2`"$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$
$\Rightarrow (\psi(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)) \ldots$"
folgt: $\psi(Q \setminus \beta) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta)$.

`15:` Aus `14.1` und
aus `14.2`
folgt: $w(Q \setminus \beta) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta)$.

...

<u>Beweis **355-19**</u> . . .

Ergo `Thema8`: $\forall \beta : (\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (w(Q \setminus \beta) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\beta)).$

Konsequenz: $\boxed{\texttt{Ac)} \,\big|\; \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (w(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))\text{”}}$

`9:` Via **32-5** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q).$

`10:` Aus `9`“$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)$” und
aus `Ac)`“$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)) \Rightarrow (w(Q \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$”
folgt: $w(Q \setminus 0) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(0).$

`11:` Via **folk** gilt: $Q \setminus 0 = Q.$

`12:` Aus `10` und
aus `11`
folgt: $w(Q) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(0).$

`13:` Aus `12` und
aus **348-3**“$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(0) = 0$”
folgt: $w(Q) = \xi - 0.$

`14:` Aus →)“ξ Zahl”
folgt via **FSA**0: $\xi + 0 = \xi.$

`15:` Via **98-15** gilt: $\xi - 0 = \xi + 0.$

`16:` Aus `14` und
aus `15`
folgt: $\xi - 0 = \xi.$

`17:` Aus `16` und
aus `13`
folgt: $w(Q) = \xi.$

□

355-20. $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ kann von $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$ mit einer beliebigen Zahl auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}))$ fortgesetzt werden.

355-20(Satz) *Es gelte:*

→) ξ *Zahl.*

→) $\psi = \mathsf{355.0}(\xi, \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}, \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}))$.

→) $w = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonleft \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \cup \psi$.

Dann folgt:

a) w *ist* A_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}))$.

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \Rightarrow (w(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

c) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \Rightarrow (w(\mathbb{N} \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha))$.

d) $w(\mathbb{N}) = \xi$.

e) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (w(\mathbb{N} \setminus \alpha) = \xi - ((-1 + \alpha) \cdot \alpha) : 2)$.

RECH-**Notation**.

$\mathsf{355.0}(\xi, \phi, A, D) \ = (\xi - .\phi) \circ (A\_\mathsf{stm.id}_D)$

Beweis **355-20**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})]$.

`2:` Aus **348-3**“ $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$ Funktion” und
aus `Thema1.1`“ $\alpha \in \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})]$ ”
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \wedge (\alpha = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\Omega))$.

`3:` Aus 2“ $\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}) \ldots$ ”
folgt via **355-17**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\Omega) \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus 2“ $\ldots \alpha = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\Omega)$ ” und
aus 3
folgt: $\alpha \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus 4“ $\alpha \in \mathbb{N}$ ” und
aus **159-10**“ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{C}$”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})]) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{C})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“} \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})] \subseteq \mathbb{C} \text{”}}$

`1.abcd):` Aus **159-9**“ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$”,
aus **241-1**“ $\mathbb{N}$ unendlich”,
aus `A1` gleich “ $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})] \subseteq \mathbb{C}$ ”,
aus →)“ ξ Zahl ”,
aus →)“ $\psi = 355.0(\xi, \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}, \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}))$ ” und
aus →)“ $w = (\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonright \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \cup \psi$ ”
folgt via **355-19**: w ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}))$

$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \Rightarrow (w(\alpha) = \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)))$$

$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})) \Rightarrow (w(\mathbb{N} \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)))$$

$$\wedge(w(\mathbb{N}) = \xi).$$

...

<u>Beweis **355-20**</u> ...

`Thema2`	$\alpha \in \mathbb{N}$.
`3.1:` Aus `Thema2`"$\alpha \in \mathbb{N}$" folgt via **241-1**:	α endlich.
`3.2:` Aus `Thema2`"$\alpha \in \mathbb{N}$" folgt via **197-4**:	$\alpha \subseteq \mathbb{N}$.
`3.3:` Aus `Thema2`"$\alpha \in \mathbb{N}$" folgt via **349-3**:	$\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha) = ((-1+\alpha)\cdot\alpha) : 2$.
`4:` Aus `Thema3.2`"$\alpha \subseteq \mathbb{N}$" und aus `3.1`"$\alpha$ endlich" folgt via **32-4**:	$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$.
`5:` Aus `4`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$" folgt via des bereits bewiesenen `c)`:	$w(\mathbb{N} \setminus \alpha) = \xi - \mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(\alpha)$.
`6:` Aus `5` und aus `3.3` folgt:	$w(\mathbb{N} \setminus \alpha) = \xi - ((-1+\alpha)\cdot\alpha) : 2$.

Ergo `Thema2`: `Ae)` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (w(\mathbb{N} \setminus \alpha) = \xi - ((-1+\alpha)\cdot\alpha) : 2)$"

□

355-21. Diese Aussage passt gut in den Kontext von **355-17**.

355-21(Satz)

Aus "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$" *und* "$((-1+n)\cdot n) : 2 \in \mathbb{N}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **355-21** `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **241-1**: n endlich.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $n \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2`"$n \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `1.1`"n endlich"

folgt via **32-4**: $\boxed{n \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})}$

`3:` Aus `2`"$n \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N})$"
folgt via **355-17**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(n) \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **349-3**: $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(n) = ((-1+n)\cdot n) : 2$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`

folgt: $\boxed{((-1+n)\cdot n) : 2 \in \mathbb{N}}$

□

- **H. Bauer**, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, De-Gruyter, 1978(3).
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.